# FELDBERECHNUNG IN ROTATIONSSYMMETRISCHEN ELEKTRONENSTRAHLERZEUGERN MIT SPITZENKATHODE UNTER BERÜCKSICHTIGUNG VON RAUMLADUNGEN

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines Doktors

der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik

der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

**Robert Weyßer**

aus Balingen

1983

# FELDBERECHNUNG IN ROTATIONSSYMMETRISCHEN ELEKTRONENSTRAHLERZEUGERN MIT SPITZENKATHODE UNTER BERÜCKSICHTIGUNG VON RAUMLADUNGEN

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines Doktors

der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik

der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

**Robert Weyßer**

aus Balingen

1983

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung: 17. Mai 1983

| | |
|---|---|
| Dekan: | Prof. Dr. A. Fäßler |
| 1. Berichterstatter | Prof. Dr. F. Lenz |
| 2. Berichterstatter | Prof. Dr. E. Kasper |

## Abstract

Weyßer, Robert

Feldberechnung in rotationssymmetrischen Elektronenstrahlerzeugern mit Spitzenkathode unter Berücksichtigung von Raumladungen

Ein Verfahren zur Lösung der Poisson-Gleichung bei vorgegebener Raumladungsdichte in rotationssymmetrischen Elektronenstrahlerzeugern mit feiner spitzenförmiger Kathode wird angegeben. Es setzt voraus, daß die Raumladungsdichte nur in einer Kugelschale endlicher Dicke merklich von Null verschieden ist. Die Lösung wird additiv aus einer Lösung der Poisson-Gleichung und einer Lösung der Laplace-Gleichung zusammengesetzt.

Zur Berechnung der Raumladungsdichte wird das Lösungsgebiet in zwei Bereiche unterteilt. Der eine ist eine der Kathodenoberfläche benachbarte Schicht, in welcher sowohl die elektrischen Feldstärken als auch die senkrecht zur Kathodenoberfläche ausgehenden Elektronenbahnen praktisch senkrechte Richtung haben. Im anderen Bereich wird eine laminare Elektronenströmung angenommen.
Die kathodennahe Schicht wird weiter in ringförmige Intervalle unterteilt, in deren jedem die von Porter et al. (1972) angegebene Lösung des Raumladungsproblems für die Kugeldiode verwendet wird. Im Bereich mit laminarer Elektronenströmung gilt die Konstanz des Stromes in jeder Stromröhre. Die lokale Stromdichte erhält man, indem man den Strom durch den jeweiligen Querschnitt der Röhre teilt.
Zur Ladungsdichteberechnung wird die für die ebene Diode geltende Raumladungsformel von Langmuir (1923) modifiziert, indem sie mit einem die Veränderlichkeit des Röhrenquerschnitts beschreibenden "Divergenzfaktor" multipliziert wird.

Potential- und Raumladungsdichteberechnung werden iterativ solange fortgeführt,bis sich in der Raumladungsdichte keine wesentliche Änderung mehr ergibt.

Die Ergebnisse der Potential- und Raumladungsberechnung für ein Triodensystem mit Spitzenkathode und ein Triodensystem mit Kugelkathode zeigen einen starken Einfluß der Raumladungsdichte auf das elektrostatische Potential. Sie kann zu einem Potentialminimum vor der Kathode führen.

Von der Kathode ausgehende Elektronenbahnen und zugehörige Stromdichteverteilungen werden ebenfalls stark beeinflußt. Eine qualitative Übereinstimmung mit Meßergebnissen von Lauer (1982) wird erzielt.

Inhalt


| | | |
|---|---|---|
| 1. | Einleitung | 1 |
| 2. | Potential- und Feldberechnung | 3 |
| 2.1 | Näherungsweise analytische Lösung der Laplacegleichung | 5 |
| 2.2 | Die numerische Lösung der Poisson-Gleichung | 8 |
| 2.2.1 | Numerische Lösung der Randwertaufgabe | 11 |
| 2.2.2 | Numerische Berechnung von Entwicklungskoeffizienten der Raumladungsdichte nach Legendrepolynomen | 16 |
| 3. | Theorie der Raumladung vor der Kathode | 19 |
| 3.1 | Methoden zur Raumladungsberechnung | 19 |
| 3.2 | Berechnung der Raumladung durch Kombination von Trajektorienmethoden und analytischen Verfahren | 24 |
| 3.2.1 | Verteilungsfunktion an der Kathodenoberfläche | 25 |
| 3.2.2 | Die Kugeldiode | 25 |
| 3.2.3 | Numerische Auswertung der Raumladungsformeln | 31 |
| 3.2.4 | Berechnung der Raumladung im Bereich laminarer Strömung | 32 |
| 3.2.5 | Ablauf des Gesamtverfahrens | 40 |
| 3.3 | Untersuchungen an der Kugeldiode | 42 |
| 4. | Raumladungseffekte in Triodensystemen mit Spitzenkathode | 47 |
| 4.1 | Ergebnisse der Potential- und Raumladungsberechnung | 49 |
| 4.2 | Fehlerabschätzung | 55 |
| 4.2.1 | Fehler bei der Potential- und Feldberechnung | 55 |
| 4.2.2 | Fehler bei der Ladungsdichteberechnung | 61 |
| 4.3 | Vergleich mit älteren Methoden zur Raumladungsberechnung | 62 |
| 4.3.1 | Die Trajektorienmethode | 62 |
| 4.3.2 | Monte-Carlo-Methoden | 63 |
| 4.3.3 | Teilweise analytische Näherungsverfahren | 65 |
| 5. | Elektronenoptische Meßgrößen unter dem Einfluß des durch die Raumladung veränderten Potentials | 67 |
| 5.1 | Vergleich von rechnerisch ermittelten Größen mit Meßergebnissen | 67 |
| 5.2 | Strahlerzeuger II | 75 |
| 6. | Zusammenfassung | 89 |

## 1. Einleitung

In elektronenoptischen Geräten werden häufig thermische Elektronenstrahlerzeuger mit Spitzenkathode eingesetzt, um Elektronenstrahlbündel mit hohem Richtstrahlwert zu erzeugen. Dies ermöglicht beispielsweise die Verwendung kleiner Elektronensonden hoher Stromdichte in der Rastermikroskopie. Ist bei hoher Emissionsstromdichte die Feldstärke in der Umgebung der Kathodenspitze relativ niedrig (etwa 200 V/cm), so kann sich dort eine negative Raumladungswolke ausbilden, die merklichen Einfluß auf die Potential- und Feldverteilung hat. Will man diese berechnen, so benötigt man eine geeignetes Lösungsverfahren für die Poisson-Gleichung, das auch bei großen Dimensionsunterschieden zwischen den einzelnen Bauteilen eines Elektronenstrahlerzeugers verwendbar ist.
Eine weitere Schwierigkeit besteht in der Berechnung der Ladungsdichteverteilung selbst. Die bisher bekannten Methoden (Kirstein und Hornby, 1964, Hauke, 1977, Renau und Read, 1982) bereiten teils erhebliche prinzipielle Schwierigkeiten und sind teils zu ungenau.
In der vorliegenden Arbeit wird daher ein Verfahren entwikkelt, das in der unmittelbaren Umgebung der Kathodenoberfläche eine analytische Näherung und in größerer Entfernung von der Kathode eine Trajektorienmethode zur Raumladungsberechnung verwendet. Hierbei wird die Geschwindigkeitsverteilung der aus der Kathode austretenden Elektronen berücksichtigt. Wegen der gegenseitigen Abhängigkeit von elektrostatischem Potential und Raumladungsdichte müssen Potentialverlauf und Raumladungsdichte abwechselnd iterativ berechnet werden.
Vergleiche von uns berechneter mit von Lauer (1982) gemessenen Emittanzdiagrammen bestätigen die praktische Anwendbar-

keit unseres Verfahrens zur Berechnung von Eigenschaften von Elektronenstrahlerzeugern.

Weiter wird die Größe des emittierenden Kathodenbereiches in Abhängigkeit von der Kathodentemperatur und der Wehneltspannung untersucht. Die Stromdichteverteilungen in einer zur optischen Achse senkrechten Ebene werden mit und ohne Berücksichtigung der Raumladungseinwirkung für verschiedene Wehneltspannungen berechnet. Weiter wird der Einfluß des durch die Raumladung bedingten Potentialminimums vor der Kathode auf die Energieverteilung des emittierten Elektronenstrom untersucht.

## 2. Potential- und Feldberechnung

Zur Berechnung der elektrostatischen Potential- und Feldverteilung ist in einem Gebiet G, nämlich dem Vakuumbereich des Elektronenstrahlerzeugers, die Poisson-Gleichung zu lösen. Zur numerischen Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta U = -\frac{1}{\varepsilon_o}\sigma \qquad \text{mit} \quad U = f \text{ auf } \partial G \tag{2.1}$$

bei Vorgabe des Potentials $U(\vec{r}) = f$ auf dem Rand $\partial G$ und der Raumladungsdichte (mit der elektrischen Feldkonstanten $\varepsilon_o$) stehen die Methode der finiten Differenzen (Weber, 1967), die Methode der finiten Elemente (Munro, 1973, Stoer, Bulirsch, 1973) und die Integralgleichungsmethode (Rauh, 1971) zur Verfügung.

Die Methode der finiten Differenzen zur Potentialberechnung wird bei Kathoden mit stark gekrümmter Oberfläche kompliziert und ungenau. Die Methode der finiten Elemente hat bei der Feldberechnung den Nachteil geringer Genauigkeit in Achsennähe, bei der Bahnberechnung den Nachteil, daß sie sich wenig zur Bestimmung des Potentials und der Feldstärkekomponenten durch Interpolation eignet (E. Kasper und F. Lenz, 1980).

Für rotationssymmetrische Anordnungen ohne Raumladung ist das Problem der Berechnung von Potential- und Feldverteilungen dadurch befriedigend gelöst, daß diese näherungsweise durch Summen analytischer Funktionen dargestellt werden (Hoch, Kasper, Kern, 1978).

Ein Programm von E. Kasper liefert die Lösung der Laplacegleichung u. a. für beliebige rotationssymmetrische Ränder. Es ist so gestaltet, daß auch Systeme mit rotationssymmetrischen Spitzenkathoden approximiert werden können (vgl. Eupper, 1982).

Die Poisson-Gleichung (2.1) wird in Zylinderkoordinaten $\rho$, z und $\varphi$ durch Superposition einer Partikulärlösung der Poisson-Gleichung $W(\rho,z)$ und einer analytischen Näherungslösung $V(\rho,z)$ der Laplacegleichung gelöst, welche nach dem obigem Verfahren gewonnen wird, d. h. es gilt

$$(2.2) \qquad U(\rho,z) = V(\rho,z) + W(\rho,z) \quad \text{mit} \quad U = f \text{ auf } \partial G$$

und

$$(2.3) \qquad \Delta U(\rho,z) = \Delta V(\rho,z) + \Delta W(\rho,z) = -\frac{1}{\varepsilon_o}\sigma(\rho,z) \; .$$

Die näherungsweise Lösung von $\Delta V(\rho,z) = 0$ mit $V = \bar{f}$, $\bar{f} := f - W(\rho,z)$, $(\rho,z)$ auf $\partial G$ wird im nachfolgenden Abschnitt kurz erläutert.

f hat hier praktisch immer die Bedeutung von Elektrodenpotentialen. $W(\rho,z)$ ist das Potential der freien Ladungsverteilung $\sigma(\rho,z)$, wie man es aus dem Coulombintegral

$$W(\rho,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{R^3}\frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, d^3\vec{r}'$$

erhält.

Aus praktischen Gründen werden nachfolgend verschiedene Koordinatensysteme eingeführt. Die Bezeichnung für die Potentialfunktionen wird in den verschiedenen Koordinatensystemen gleich gewählt. Es werden nur ihre Argumente entsprechend verändert.

## 2.1 Näherungsweise analytische Lösung der Laplacegleichung

Die analytische Feldberechnung setzt voraus, daß sämtliche Quellen des Feldes (Raumladungen und Oberflächenladungen bei vorgegebener Form der Oberflächen) bekannt sind. In der Regel sind jedoch nur Raumladungen und die Form von Oberflächen bekannt. Oberflächenladungen und Dipolbelegungen müssen erst durch Lösung einer Integralgleichung bestimmt werden. Für alle quellfreien Gebiete G erhält man für das Dirichlet-Problem, bei dem das Potential V auf dem Rand $\partial G$ durch die Gleichung

$$V(\vec{r}) = \bar{f}(\vec{r}) \qquad (\vec{r} \text{ auf } \partial G) \tag{2.4}$$

vorgegeben ist (vgl. Rauh, 1971), eine Integralgleichung für die Oberflächenladungsdichte $\eta(r')$

$$\bar{f}(\vec{r}) = \int_{\partial G} \frac{\eta(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, d^3\vec{r}'$$

bei konstanten Randwerten auf jeder Elektrodenoberfläche. Bei rotationssymmetrischen Rändern läßt sich immer eine Parameterdarstellung finden, bei welcher einer der Parameter das Azimut $\varphi'$ bezüglich der Symmetrieachse und der andere die Bogenlänge s längs eines Meridionalschnittes ist. Dann ist $\rho' = \rho'(s)$, $z' = z'(s)$ und $\eta = \eta(s)$ . Die Integration über $\varphi'$ kann damit analytisch ausgeführt werden, und man braucht nur noch die eindimensionale Integration über die Bogenlänge s zu diskretisieren d.h. durch eine Summation zu ersetzen. Die Integration über $\varphi'$ liefert einen Ausdruck für das Potential eines geladenen Kreisringes. Das Integral stellt eine Überlagerung von Lösungen der Laplacegleichung

dar, die auf dem Rand des Lösungsgebietes singulär werden. Dies kann nach Hoch, Kasper und Kern (1978) in folgender Weise vermieden werden:

Anstatt Funktionen zu verwenden, die auf dem Rand $\partial G$ singulär sind, werden partikuläre rotationssymmetrische Lösungen $h(\vec{r},\vec{r}')$ der Laplacegleichung benutzt, deren Singularitäten $\vec{r}'$ außerhalb des Lösungsgebietes liegen, d.h. in unserem Fall im Elektrodeninneren. Wir erhalten dann eine Integralgleichung der Form

$$(2.5) \qquad \bar{f}(\vec{r}) = \int \frac{\mu(\rho',z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' \qquad (\vec{r} \text{ auf } \partial G).$$

$\mu(\rho',z')$ hat hier nicht mehr die Bedeutung einer Oberflächenladungsdichte, da die Quellen im Elektrodeninneren liegen. Nach Ausführung der Integration über das Azimut $\varphi'$ und der Summation über die diskretisierten Quellen, erhält man ein lineares Gleichungssystem für die Ladungen $\mu_j$ auf N diskreten Kreisringen mit den Ringkoordinaten $(R_j,Z_j)$ :

$$(2.6) \qquad U(\rho_i,z_i) = \sum_{j=1}^{N} \mu_j h(\rho_i,z_i, R_j,Z_j) + W(\rho_i,z_i); \quad (i=1,\ldots,N).$$

Um das Gleichungssystem nach den $\mu_j$ auflösen zu können, müssen die Werte von $V(\rho_i,z_i) = U(\rho_i,z_i)-W(\rho_i,z_i)$ an N Potentialstützpunkten $\rho_i,z_i$ auf den Elektrodenoberflächen bekannt sein. Die Funktion $h(\rho,z,R_j,Z_j)$ ist hierbei das Potential eines geladenen unendlich dünnen Kreisringes mit der Normladung eins und dem Radius $R_j$ in der Ebene $z = Z_j$ im Aufpunkt $(\rho,z)$. Um bei Elektroden mit ebener Stirnfläche auf dem Rand Integrationsstützpunkte einzusparen, werden zusätzliche Potentiale von koaxialen Lochblenden superponiert.

Dabei wird das Potential jeder Lochblende aus den vorgegebenen Potentialen der zugehörigen Elektroden bestimmt. Mit dem Blendenpotential $B_A^M(\rho,z)$ von M Lochblenden erhält man für das System aus N geladenen Kreisringen und M koaxialer Lochblenden für einen beliebigen Aufpunkt $(\rho,z)$

$$(2.7)\quad U(\rho,z) = \sum_{j=1}^{N} \mu_j h(\rho,z,R_j,Z_j) + W(\rho,z) + B_A^M(\rho,z) \ .$$

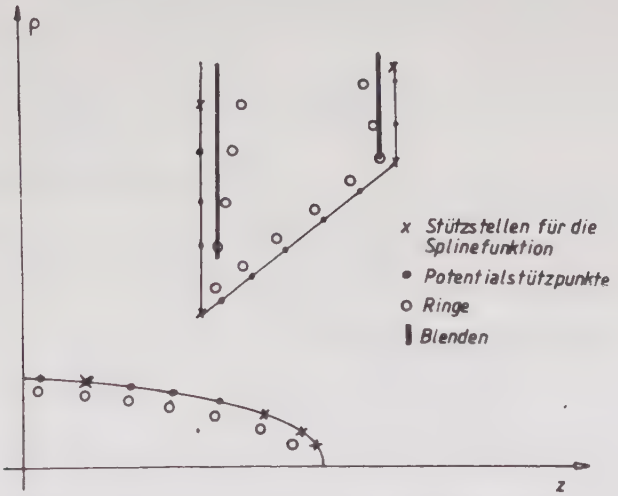



Abb. 1: Schematische Darstellung der Stützstellen für die Splinefunktion, Lage der Kontrollpunkte (Potentialstützpunkte) und Ringe sowie Blendenpositionen im Wehneltbereich eines Elektronenstrahlerzeugers mit Spitzenkathode

Der Rand des Lösungsgebietes wird nun durch eine endliche Anzahl von N Stützstellen ( $\rho_i$, $r_i$) i =1, ..., N beschrieben. Die Randkurve selber kann durch zwei Splinefunktionen z(s), ρ(s), mit der Bogenlänge s als Parameter, vorgegeben werden. Aus dieser Kurve werden dann die N Stützstellen berechnet (vgl. M. Eupper, 1980). Bei Vorgabe des Potentials in den Stützpunkten ($\rho_i$,$z_i$)
(i = 1, ..., N) erhält man die Ladungen $\mu_j$ in Gl (2.7) durch Lösung des linearen Gleichungssystems

$$(2.8)\quad U(\rho_i,z_i) = \sum_{j=1}^{N} \mu_j h(\rho_i,z_i,R_j,Z_j) + W(\rho_i,z_i) + B_A^M(\rho_i,z_i), \{i=1...N$$

Als Lösungsverfahren wählen wir den Gaußalgorithmus, denn das lineare Gleichungssystem (2.8) ist bei geeigneter Wahl der Ring- und Blendenpositionen immer gut konditioniert.
Nun kann das elektrostatische Potential der Anordnung aus Gl. (2.7) im ganzen Raum gewonnen werden. Außerdem lassen sich die Feldstärkekomponenten $E_\rho$, $E_z$ und $E_\varphi$ in jedem gewünschten Aufpunkt außerhalb der Singularitäten durch gliedweise Differentiation der Reihe (2.7) berechnen.

## 2.2 Die numerische Lösung der Poisson-Gleichung

Von Gl. (2.3) bleibt der Teil

$$(2.9)\quad \Delta W = -\frac{1}{\varepsilon_o}\sigma(\rho,z)$$

zu lösen. Hierzu werden in Anpassung an die Kathodengeometrie Kugelkoordinaten mit dem Koordinatenursprung im Krümmungsmittelpunkt der Kathodenspitze eingeführt. Die Sym-

metrieachse wird in Richtung der z-Koordinate gelegt. Die Transformationsbeziehungen zwischen Zylinderkoordinaten $\rho$, z und $\varphi$ und sphärischen Polarkoordinaten r, $\vartheta$ und $\varphi$ lauten

$$(2.10)\qquad \begin{cases} \rho = r\sin\vartheta & ;\ 0 \leq \vartheta \leq \pi \\ \varphi = \varphi & ;\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z = r\cos\vartheta & ;\ 0 \leq \vartheta \leq \pi\ . \end{cases}$$

In diesen Koordinaten hat die Poissongleichung für rotationssymmetrische Potentialfunktionen $W(r,\vartheta)$ die Form

$$(2.11)\qquad \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\,W(r,\vartheta)) + \frac{1}{r^2}\,\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}\,W(r,\vartheta)\right) = -\frac{1}{\varepsilon_o}\sigma(r,\vartheta).$$

Für $W(r,\vartheta)$ machen wir den Ansatz

$$(2.12)\qquad W(r,\vartheta) = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{L}\phi_l(r)\,P_l(\cos\vartheta),$$

wobei die Funktionen $P_l(\cos\vartheta)$ die Legendre-Polynome sind. Die Zahl der Summanden ist wegen der Begrenzung des verfügbaren Speicherplatzes auf $0 \leq L \leq 73$ beschränkt. Die Funktionen $\phi_l(r)$ seien für $r \geq r_o$ beschränkt und stetig differenzierbar. Wir entwickeln auch die Raumladungsdichte in eine endliche Reihe der Form

$$(2.13)\qquad \sigma(r,\vartheta) = -\varepsilon_o\sum_{l=0}^{L} c_l(r)(2l+1)P_l(\cos\vartheta).$$

Setzt man die Reihen (2.12) und (2.13) in Gl. (2.11) ein, so dürfen auf Grund der Voraussetzungen für die Funktionen $\phi_l(r)$, (l = 0, ..., L) Summation und Differentiation vertauscht werden, d. h. die Differentiationen dürfen gliedweise ausgeführt werden. Wir erhalten durch Koeffizientenvergleich

$$(2.16)\qquad \Phi_l''(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}\Phi_l(r) = r(2l+1)c_l(r)\ ;\ (l=0,\ldots,L).$$

Um Speicherplatz zu sparen, machen wir die Annahme, daß die Raumladung nur in dem beschränkten Bereich $r_o \leq r \leq r_n$ von null verschieden ist (Abb. 2). Die Differentialgleichungen (2.16) sind als Randwertproblem zu lösen.

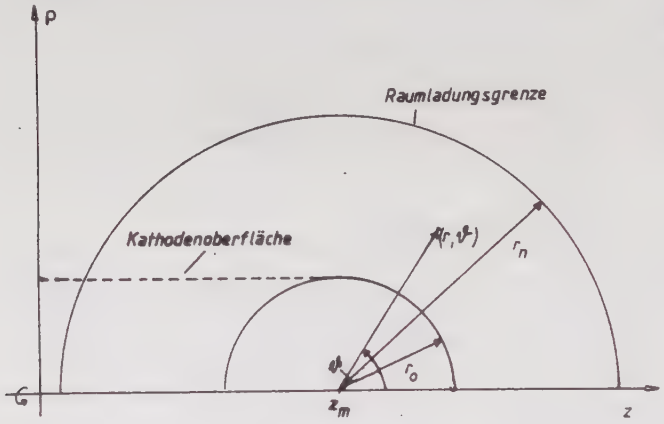



Abb. 2: Zur Berücksichtigung der Raumladungsdichte in einem endlichen Bereich vor der Kathode, werden Kugelkoordinaten mit dem Kathodenkrümmungsmittelpunkt als Ursprung eingeführt.

Die Lösungen dieser linearen inhomogenen Differentialgleichungen, die für $r\to\infty$ gegen Null gehen, sind von der Form

$$(2.22)\ \Phi_l(r) = b_l r^{-l} - \int_{r_o}^{r} r^{-l}s^{l+2}c_l(s)ds - \int_{r}^{r_n} r^{l+1}s^{-l+1}c_l(s)ds\ .$$

Dabei wird der Koeffizient $b_l$ so bestimmt, daß $\Phi_l(r_o)=0$ wird:

$$b_l = r_o^{2l+1} \cdot \int_{r_o}^{r_n} s^{-l+1} c_l(s)\,ds \ .$$

Die Randwerte an den Stellen $r=r_n$ und $r=r_o$ lauten also

$$\phi_l(r_n) = b_l r_n^{-l} - \int_{r_o}^{r_n} r_n^{-l} s^{l+2} c_l(s)\,ds; \quad \phi_l(r_o) = 0. \tag{2.23}$$

Für $r \geq r_n$ gilt

$$\phi_l''(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}\,\phi_l(r) = 0$$

mit der Lösung

$$\phi_l(r) = \phi_l(r_n)(r/r_n)^{-l} \ .$$

## 2.2.1 Numerische Lösung der Randwertaufgabe

Zunächst wollen wir die gewöhnlichen Differentialgleichungen (2.16) mit den Randbedingungen (2.23) lösen. Dem nachfolgend dargestellten Algorithmus geben wir wegen seiner Einfachheit und wegen des geringeren Rechenaufwandes der numerischen Integration von Gl. (2.22) den Vorzug.

Daher wird das Intervall $r_o \leq r \leq r_n$ in $n$ Teilintervalle $r_i \leq r \leq r_{i+1}$ gleicher Länge $h := (r_n - r_o)/n$ unterteilt und aus der Differentialgleichung (2.16) lineare Beziehungen zwischen $\phi_l(r_i)$ für $i=0,\ldots,n$ hergeleitet (Fox, 1957). Für die Dgl. (2.16) lautet die zugehörige Differenzenformel

$$\begin{cases} A_i\phi_{l,i-1} + B_i\phi_{l,i} + C_i\phi_{l,i+1} = \\ (h^2/12)(g_{i+1} + 10g_i + g_{i-1}) \\ - (h^6/240)\phi_l^{(6)}(\xi); \quad r_{i-1} \leq \xi \leq r_{i+1}, \quad i=1,\ldots,n \ . \end{cases} \tag{2.24}$$

Mit den Koeffizienten der Diskretisierung, $A_i$, $B_i$, $C_i$, erhält man ein tridiagonales System von n Bestimmungsgleichungen für die $\phi_{l,i}$ . Die Koeffizienten lauten für i=1,...,n-1

$$A_i = 1 - \frac{h^2}{12} l(l+1) r_{i-1}^{-2};$$

$$B_i = -2\left(1 + \frac{5h^2}{12} l(l+1) r_i^{-2}\right);$$

$$C_i = 1 - \frac{h^2}{12} l(l+1) r_{i+1}^{-2};$$

$$g_{i-1} = -r_{i-1} c_l(r_{i-1}) ;$$

$$g_i = -r_i c_l(r_i) ;$$

$$g_{i+1} = -r_{i+1} c_l(r_{i+1}) .$$

Mit der Abkürzung $\tilde{g}_i := (h^2/12)(g_{i+1} + 10g_i + g_{i-1})$ und bei Vernachlässigung des Restgliedes der Ordnung $h^6$ wird aus Gl. (2.24)

$$(2.25) \quad A_i \phi_{l,i-1} + B_i \phi_{l,i} + C_i \phi_{l,i+1} = \tilde{g}_i .$$

Für genügend kleine h gilt nun

$$(2.26) \quad |A_i| + |C_i| < |B_i| .$$

Damit ist die zum tridiagonalen Gleichungssystem (2.24) gehörige Koeffizientenmatrix sicher nicht singulär. Für die Indices i = 0 und i = n ist $\phi_{l,i}$ durch die Gl. (2.23) vorgegeben. Deren Auswertung wird später behandelt. Die erste und die letzte Gleichung von Gln. (2.24) lauten somit

$$(2.27) \begin{cases} B_1 \phi_{l,1} + C_1 \phi_{l,2} = \tilde{g}_1 - A_1 \phi_{l,o} \\ A_{n-1} \phi_{l,n-2} + B_{n-1} \phi_{l,n-1} = \tilde{g}_{n-1} - C_{n-1} \phi_{l,n} \end{cases}$$

mit $\phi_{1,o} = 0$ und $\phi_{1,n} = \phi_1(r_n)$ .

Zur Lösung des tridiagonalen Gleichungssystems (2.24) machen wir nun den Ansatz (Kasper, 1980)

$$\phi_{1,i} = D_i(G_i - C_i\phi_{1,i+1}); i = 1, \ldots, n-1. \tag{2.28}$$

Mit Gl. (2.28) gilt bei entsprechender Umbenennung

$$\phi_{1,i-1} = D_{i-1}(G_{i-1} - C_{i-1}\phi_{1,i}); \; i = 1, \ldots, n . \tag{2.29}$$

Durch Einsetzen von Gl. (2.29) in Gl. (2.24) erhalten wir die Beziehung

$$(B_i - A_iD_{i-1}C_{i-1})\phi_{1,i} + C_i\phi_{1i+1} = \tilde{g}_i . \tag{2.30}$$

Der Koeffizientenvergleich mit dem Ansatz (2.28) ergibt dann

$$\left.\begin{aligned} D_i &= (B_i - A_iD_{i-1}C_{i-1})^{-1} \\ G_i &= g_i - A_iD_{i-1}G_{i-1}. \end{aligned}\right\} \quad i = 1, \ldots, n-1 \tag{2.31}$$

Die Gln. (2.31) stellen eine Rekursion für die Koeffizienten des Ansatzes (2.28) dar. Die Anfangsglieder der Rekursion erhalten wir aus der ersten Gleichung des Tridiagonalsystems und dem Ansatz (2.28) zu

$$G_o = 0; \; D_o = 1; \; C_o = 0. \tag{2.32}$$

Sind nach Lösung der Rekursion (2.31) mit den Startwerten (2.32) alle $D_i$ und $G_i$ bekannt, so erhalten wir aus Gl. (2.29), ausgehend von $\phi_{1,n}$ der Reihe nach $\phi_{1,n} \cdots \phi_{1,1}$ und

damit die Lösung des Tridiagonalsystems (2.24). Das Verfahren ist numerisch stabil, wenn die Bedingung (2.26) erfüllt ist.

Das Potential erhalten wir im Stützradius $r_i$ aus der Reihe

$$(2.33) \qquad W(r_i,\vartheta) = (1/r_i)\sum_{l=0}^{L}\phi_l(r_i)\,P_l(\cos\vartheta)\ .$$

Zur Berechnung des Potentials in einem Punkt r zwischen zwei Stützradien $r_i < r < r_{i+1}$ werden zunächst die Werte

$$(2.34) \qquad \hat{W}(r_{i-j+2}) = \sum_{l=0}^{L}\phi_l(r_{i-j+2})P_l(\cos\vartheta),\ j = 0, \ldots, 5,$$

berechnet. Anschließend werden die Ableitungen $\hat{W}'(r)$ durch numerische Differentiation nach dem Neville-Algorithmus (Stoer, 1969, Kasper, 1982) in den Stützradien gebildet. In der Nähe des Randes $r = r_o$ bzw. $r = r_n$ liegt der Aufpunkt nicht mehr im Zentralintervall der zur Differentiation benutzten Stützstellen. Es wird mit dem Verfahren dennoch eine hohe Genauigkeit erzielt. Nun können die Funktionswerte $\hat{W}(r)$ bzw. die Ableitungen $\partial\hat{W}(r)/\partial r$ durch kubische Hermite-Interpolation ermittelt werden. Hierzu werden nur die Funktionswerte und die ersten Ableitungen an den beiden Rändern des Interpolationsintervalls, in dem der Aufpunkt liegt, benötigt. Somit ist $\hat{W}(r)$ und $\hat{W}'(r)$ für alle r im Intervall $r_o \leq r \leq r_n$ bekannt. Das Potential erhalten wir damit im Punkt $(r,\vartheta)$ aus der Reihe

$$(2.35) \qquad W(r,\vartheta) = (1/r)\sum_{l=0}^{L}\phi_l(r)P_l(\cos\vartheta)\ ;\ r_o \leq r \leq r_n\ .$$

Im raumladungsfreien Gebiet muß Gl. (2.35) stetig in eine Lösung der Laplacegleichung übergehen. Hierbei muß also

$$(2.36) \qquad W(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{L} a_l P_l(\cos\vartheta)(r_n/r)^{l+1}, \quad r > r_n$$

mit

$$(2.37) \qquad a_l = \Phi_l(r_n) r_n^{-1}$$

sein. Für $r=r_o$ liefert Gl. (2.35) ein Potential $W(r,\vartheta) = 0$, was dem Kathodenpotential entspricht.
Für $L = 0$ erhalten wir aus Gl. (2.35) mit $b_o = 0$ den bekannten Ausdruck für die homogen geladene Hohlkugel (Kellog, 1929).

Die Feldstärkekomponenten des Potentials $W(r,\vartheta)$ erhalten wir in dem gewählten Kugelkoordinatensystem durch entsprechende Gradientenbildung von Gl. (2.35) zu

$$(2.42) \qquad E_r = \sum_{l=0}^{L} \left( \frac{1}{r^2}\Phi_l(r) - \frac{1}{r}\Phi'_l(r) \right) P_l(\cos\vartheta)$$

$$(2.43) \qquad E_\vartheta = \sum_{l=0}^{L} \frac{1}{r^2}\Phi_l(r) \frac{1}{\sin\vartheta} \left[ P_{l-1}(\cos\vartheta) - \cos\vartheta\, P_l(\cos\vartheta) \right] .$$

Für $\vartheta \leq 10^{-4}$ ist Gl. (2.43) numerisch ungünstig. Wir entwikkeln deshalb die trigonometrische Funktion in Gl. (2.43) in Taylorreihen bis zu Gliedern zweiter Ordnung und erhalten

$$(2.44) \qquad P'_l(\cos\vartheta) = - 0.5\, l(l+1)\vartheta .$$

Somit lautet Gl. (2.43) für $0 \leq \vartheta \leq 10^{-4}$

$$(2.45) \qquad E_\vartheta = \sum_{l=0}^{L} \frac{1}{r^2}\Phi_l(r) \cdot \frac{l(l+1)}{2}\vartheta .$$

Im raumladungsfreien Bereich ($r > r_n$) gilt

$$(2.46)\qquad E_r = \sum_{l=0}^{L} (l+1)\, a_l \frac{1}{r_n}\left[\frac{r_n}{r}\right]^{l+2} P_l(\cos\vartheta)$$

$$(2.47)\qquad E_\vartheta = \sum_{l=0}^{L} \frac{1}{r}\,\frac{1}{\sin\vartheta}\, a_l \left[\frac{r_n}{r}\right]^{l+1} \cdot \left[P_{l-1}(\cos\vartheta) - \cos\vartheta\, P_l(\cos\vartheta)\right]$$

und mit Gl. (2.44)

$$(2.48)\qquad E_\vartheta = \sum_{l=0}^{L} \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{2}\cdot\vartheta\cdot a_l \left[\frac{r_n}{r}\right]^{l+1} \cdot l(l+1); \qquad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 10^{-4}.$$

Somit sind im gesamten Lösungsgebiet das Potential und die Feldstärke der Raumladungsdichte bekannt.

## 2.2.2 Numerische Berechnung von Entwicklungskoeffizienten der Raumladungsdichte nach Legendrepolynomen

Wir haben die Raumladungsdichte gemäß Gl. (2.13) in einer endlichen Legendrereihe dargestellt. Ist $\sigma$ nicht in dieser Form gegeben, so müssen die Koeffizientenfunktionen $c_l(r)$ erst numerisch berechnet werden. Unter Verwendung der Orthogonalitätsrelation für die Legendrepolynome

$$(2.49)\qquad \int_{-1}^{+1} P_l(u)P_k(u)\,du = \delta_{lk}\frac{2}{2l+1}, \qquad (u = \cos\vartheta)$$

erhalten wir für die Entwicklungskoeffizienten

$$(2.50)\qquad c_l(r) = -\frac{1}{2\varepsilon_0}\int_{-1}^{+1}\sigma(r,\vartheta)P_l(\cos\vartheta)\,d(\cos\vartheta).$$

Der Integrand in Gl. (2.50) oszilliert für große l stark. Dies erschwert die numerische Auswertung dieser Gleichung. Da nach (2.13) $\sigma(r,\vartheta)$ ein Polynom vom L-ten Grade in $u=\cos\vartheta$ ist, ist der Integrand auf der rechten Seite von (2.50) vom höchstens 2L-ten Grades. Es gilt daher exakt die Gaußsche Quadraturformel

$$(2.51)\qquad c_l(r) = -\frac{1}{2\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{L+1} w_j\,\sigma(r,\arccos(x_j))P_l(x_j)\,.$$

Dabei sind die $x_j$ die Nullstellen von $P_{L+1}(x)$

und die Gewichte sind durch

$$(2.52) \qquad w_j = 2/[(1-x_j^2)[P_{L+1}'(x_j)]^2]$$

gegeben. Die Stützpunkte $x_j$ und Gewichte $w_j$ wurden nach einem von M. Eupper entwickelten Nullstellensuchprogramm berechnet.

Durch die Wahl nicht äquidistanter Stützpunkte $x_j$, $j = 1, \ldots, L+1$ wird die allgemeine Verwendbarkeit der Quadraturformel eingeschränkt. In unserem Fall können jedoch mit dem im nächsten Kapitel angegebenen Verfahren die Raumladungsdichten in jedem Punkt berechnet werden. Die Werte $\sigma(r_i, \vartheta_j^*)$ werden für die äquidistanten Radien $r_i = r_o + ih$ $(i=0,\ldots,n)$ in den Winkelstützstellen $\vartheta_j^*$ der Quadraturformel (2.51) durch Interpolation ermittelt und abgespeichert (Abb. 3).

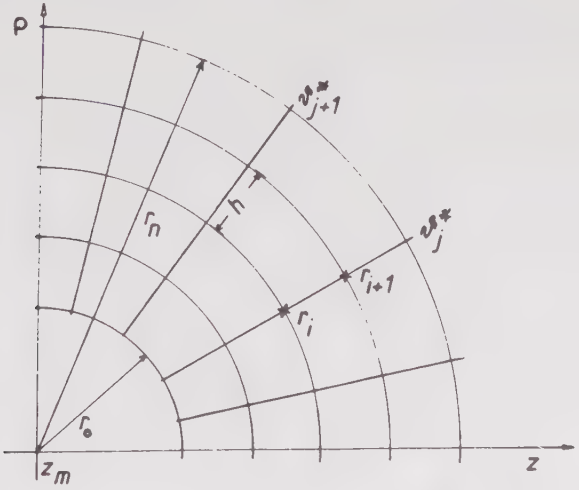



Abb. 3: Abspeicherung der Werte $\sigma(r_i, \vartheta_j^*)$ der Raumladungsdichte in diskreten Stützstellen zur numerischen Berechnung der Entwicklungskoeffizienten $c_1(r)$

Die Annäherung einer vorgegebenen Funktion $\sigma(r_i,\vartheta)$ durch Entwicklung nach Legendre-Polynomen $P_l(\cos\vartheta)$ ist wegen der endlichen Zahl L+1 der Summanden mit einem Abbruchfehler behaftet. Dieser ist umso kleiner, je größer L ist.Er hängt aber auch davon ab, wie rasch die zu approximierende Funktion mit $\vartheta$ variiert. Es läßt sich eine Funktion, die bezüglich der Variablen $\vartheta$ steile Maxima oder Minima hat, nur durch eine Summe mit vielen Gliedern befriedigend approximieren, während eine glättere Funktion von $\vartheta$ bei gleichen Anforderungen an die Genauigkeit der Approximation mit weniger Gliedern auskommt. Um die Güte der Approximation zu überprüfen, werden bei der Behandlung konkreter Beispiele die Werte der abgebrochenen Reihen mit denen der ursprünglich gegebenen Funktion $\sigma(r,\vartheta)$ verglichen. Im Fall der in Abb. 19 dargestellten normierten Ladungsdichten war für L=43 der maximale relative Abbruchfehler $3.10^{-3}$ , für L=72 beträgt er $4.10^{-4}$.

## 3. Theorie der Raumladung vor der Kathode

### 3.1 Methoden zur Raumladungsberechnung

Die Potentialverteilung in einem rotationssymmetrischen Strahlerzeugungssystem ist bei bekannter Raumladung durch Lösung der Poisson-Gleichung bestimmbar. Das Problem besteht darin, physikalisch vernünftige Näherungsannahmen für die Raumladungsdichte als Ortsfunktion zu finden.

Durch die Beschränkung auf stationäre Lösungen der Poisson-Gleichung werden zeitabhängige Effekte wie Raumladungswellen vernachlässigt. Wir vernachlässigen ferner den Einfluß sowohl von äußeren als auch von den durch den Strahlstrom selbst erzeugten Magnetfeldern. Die Beschränkungauf stationäre Felder impliziert die Vernachlässigung individueller elektrostatischer Wechselwirkungen zwischen den einzelnen geladenen Teilchen im Elektronenstrahl. Unsere Annahme einer stationären Raumladungsverteilung $\sigma(\vec{r})$ und einer zugehörigen Potentialverteilung $W(\vec{r})$ ist eine Näherung, welche die wirkliche zeitabhängige Mikroverteilung durch eine gemittelte ersetzt. Derartige Effekte werden z. B. in den Arbeiten von Löffler (1969), Zimmermann (1970) und Rose und Spehr (1980) behandelt. In diesen Arbeiten bleibt jedoch der Einfluß der Raumladung auf den Feldverlauf unberücksichtigt.

Die Annahme eines zeitunabhängigen Potentials $W(\vec{r})$ führt dazu, daß die Gesamtenergie jedes einzelnen Elektrons d.h. die Summe aus seiner kinetischen und seiner potentiellen Energie, konstant ist.

In früheren Arbeiten wurde die Raumladungsdichte durch eine Trajektorienmethode berechnet. Bei dieser zerlegt man den von der Kathode emittierten Strom in eine Anzahl von Stromfäden, deren Verteilung im Strahlerzeugungssystem durch nu-

merische Lösung der Lorentzschen Bewegungsgleichung bestimmt wird. Aus diesen Verteilungen errechnet sich dann die Raumladungsdichte. Diese Verfahren (vgl. z.B. Kirstein und Hornsby, 1964) vernachlässigen aber die endliche Geschwindigkeits- und Energieverteilung der aus der Kathode austretenden Elektronen, Ferner mußte angenommen werden, daß die Feldstärke an der Kathodenoberfläche größer oder gleich null sei.

Weber hat 1967 ein Verfahren angegeben, das die endliche Energieverteilung der aus einer ebenen Kathode austretenden Elektronen teilweise berücksichtigt. Die elektrische Feldstärke an der Kathodenoberfläche wird hier als verschwindend angenommen. Ebenso wird die zur Kathodenoberfläche senkrechte Geschwindigkeitskomponente vernachlässigt. Die iterative Berechnung von Potential- und Raumladungsdichte wird hier so lange fortgeführt, bis die Änderung in der Raumladungsdichte eine vorgegebene Schranke unterschreitet.

Auf Grund der oben genannten einschneidenden Näherungsannahmen erscheinen uns die mit diesen Methoden gewonnenen Resultate unrealistisch. Ziel der oben genannten Arbeiten waren die Untersuchung und die Konstruktion von Elektronenstrahlerzeugern sehr hoher Stromdichte, wie sie z. B. in Mikrowellenröhren eingesetzt werden. Es handelt sich hierbei ausnahmslos um Systeme mit Bolzenkathoden. Da diese in der Elektronenmikroskopie kaum Bedeutung haben, beschäftigt sich die vorliegende Arbeit nicht weiter mit ihnen.

In elektronenoptischen Geräten werden häufig Dreielektrodensysteme (Triodensysteme) mit Spitzenkathoden eingesetzt. Die Wehneltspannung wird so gewählt, daß nur die an der Kathodenspitze emittierten Elektronen abgesaugt werden (Abb.

4). Die Elektronen emittierende Fläche wird durch den Winkel $\vartheta_e$ festgelegt. Im folgenden wird vorausgesetzt, daß für alle $\vartheta < \vartheta_e$ die Kathodenoberfläche nicht von der Kugelform abweicht. Im Bereich vor der Kathodenspitze ist die Feldstärke unter Umständen so gering, daß nicht alle Elektronen abgesaugt werden. Dann bildet sich eine negative Raumladungswolke, die das Potential soweit absenkt, daß ein negatives Potentialminimum unmittelbar vor der Kathode entsteht. Ein derartiger Effekt kann nur unter Berücksichtigung der vollen Energie- und Winkelverteilung der aus der Kathode austretenden Elektronen realistisch beschrieben werden.

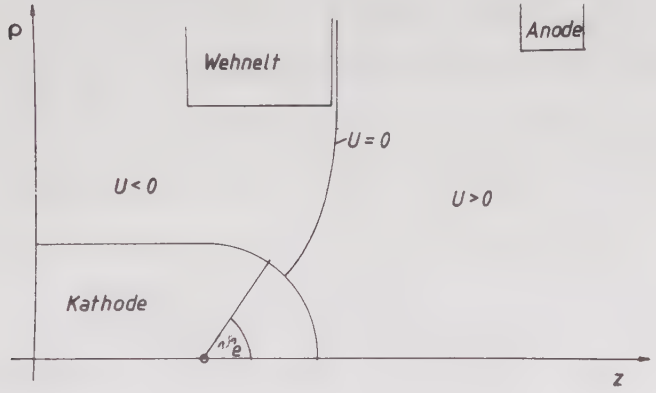



Abb. 4: Prinzipielle Funktionsweise eines Triodensystems mit Spitzenkathode. $\vartheta_e$ charakterisiert den Bereich der Kathode, aus dem thermisch emittierte Elektronen zur Anode gelangen können.

Die Erklärung eines derartigen Potentialverlaufes gelang erstmals unter Berücksichtigung der vollen Energie- und Austrittsverteilung der Elektronen aus der Kathodenoberfläche in der Theorie von Langmuir (1923) für die planare Diode

(vgl. z. B. Nottingham, 1956). Weitere Lösungen wurden für Systeme mit hoher Symmetrie, wie die Zylinder- und die Kugeldiode (Porter et al. 1972) angegeben. In einer Reihe von Arbeiten hat Hasker (1966,1969) den Filtereffekt der durch die Raumladungswolke bedingten Potentialbarriere in Systemen mit ebener Kathode untersucht.

Eine der neueren Arbeiten auf diesem Gebiet ist die Tübinger Dissertation von R. Hauke (1977). Hauke löste das Problem der Potential- und Raumladungsberechnung iterativ, ausgehend vom Potential der Lapalacegleichung. Bei gegebenem Potentialfeld ermittelte er die Raumladung aus einer sehr großen Zahl von Elektronenbahnen mit einer statistischen Verteilung der Anfangsbedingungen entsprechend der Maxwellverteilung an der Kathodenoberfläche. Die Eingangsparameter Austrittsort, kinetische Anfangsenergie und Austrittsrichtung wurden hierbei durch einen Zufallszahlengenerator ermittelt. Die Bahnen wurden entsprechend ihrer Emissionswahrscheinlichkeit mit einem Gewichtsfaktor versehen (Monte-Carlo-Methode). Die Lorentzsche Bewegungsgleichung wurde mit der Zeit als Parameter mit äquidistanter Schrittweite gelöst. Mit der so gewonnenen Raumladungsdichte erfolgte die Lösung der Poissongleichung nach der Methode der finiten Differenzen. Die Anzahl der Bahnendpunkte eines Integrationschrittes der Bewegungsgleichung in einem Quadrat des Maschennetzes ist hierbei ein Maß für die Raumladungsdichte. Nach Lösung der Poissongleichung wird erneut die Raumladungsdichte berechnet. Das Verfahren wird so lange wiederholt, bis die maximale Änderung in der Raumladungsdichte eine vorgegebene Fehlerschranke unterschreitet. Bei der Anwendung dieses Verfahrens auf Systeme mit rotationssymmetri-

scher Spitzenkathode wurde im Kathodenraum ein elliptisches Koordinatensystem eingeführt. Da die Koordinatenlinien in der Regel nicht mit der Kathodenoberfläche zusammenfallen, treten hier zusätzliche Schwierigkeiten bei der Feldberechnung auf; das Verfahren wird gerade im wichtigen Bereich vor der Kathode sehr ungenau. Versucht man die Genauigkeit in der Feldberechnung durch ein sehr dichtes Maschennetz zu erhöhen, so müssen erheblich mehr Bahnen berechnet werden, um eine einigermaßen glatte Raumladungsdichte zu erhalten.

Für ein System mit ebener Kathode wurde als weitere Methode zur Raumladungsdichtebestimmung eine Zerlegung des Raumes vor der Kathode in planare Dioden vorgenommen. Eine Äquipotentiallinie vor der Kathode wurde dabei aus einer Anzahl planarer Dioden approximiert. Für jedes dieser Elemente wurde die Raumladungsdichte aus der Formel von Langmuir bestimmt.

Die jüngste uns bekannte Arbeit stammt von Renau et al. (1982). Die Verfasser vergleichen bei Systemen mit ebenen Kathoden eine Trajektorienmethode, bei der die endliche Anfangsenergie der Elektronen vernachlässigt wird, mit einer Methode, bei der ähnlich wie bei Hauke die Raumladungsdichte aus einer sehr großen Zahl von Elektronenbahnen, die auf der Kathodenoberfläche unter Annahme einer Maxwellschen Energieverteilung starten, gewonnen wird. Dieses Verfahren wurde jedoch wegen des zu hohen Bedarfs an Rechenzeit verworfen.

## 3.2 Berechnung der Raumladung durch Kombination von Trajektorienmethoden und analytischen Verfahren

Wegen der in Abschnitt 3.1 genannten bei den bisher bekannten Methoden auftretenden Schwierigkeiten werden wir dem Verfahren folgende Näherungsannahmen zugrundelegen:

1. Die Raumladung ist nur innerhalb einer Kugelschale $r_o<r<r_n$ von Null verschieden.
2. In einer unmittelbar an der Kathodenoberfläche liegenden Schicht $r_o<r<r_k$ hat die Feldstärke praktisch nur eine Radialkomponente.
3. In einer Kugelschale $r_k<r<r_n$ haben die Elektronen schon eine Geschwindigkeit erreicht, die groß gegen die thermische Geschwindigkeit beim Austritt aus der Kathode ist, d.h. $eU(r_k,\vartheta)>>kT$.
4. Es genügt die Werte $\sigma_j(r)$ der Raumladungsdichte längs einer Anzahl von Trajektorien zu kennen, welche die Kathodenoberfläche an den äquidistanten Stellen $r=r_o,\vartheta=\vartheta_j$ $(j=1,\ldots,N_B)$ mit der Anfangsenergie 2kT senkrecht zur Oberfläche verlassen.

In der Schicht $r_o<r<r_k$ sind die Trajektorien geradlinige Strahlen senkrecht zur Kugeloberfläche $r=r_o$. Für den Zusammenhang zwischen der längs dieser Strahlen herrschenden Raumladungsdichte $\sigma_j(r)$ und Potentialverteilung $U_j(r)$ gilt näherungsweise die Theorie der Kugelkathode mit Raumladung (J.M. Porter et al., 1971), welche die kugelsymmetrische Diode mit $\sigma(r)=\sigma_j(r)$ und $U(r)=U_j(r)$ im Intervall $r_o<r<r_k$ mit einer Kathode $r=r_o$ und einer Anode $r=r_k$ beschreibt. Dabei kann (muß aber nicht) angenommen werden, daß der Elektrodenabstand $r_k-r_o$ vom Index j abhängt.

### 3.2.1 Verteilungsfunktion an der Kathodenoberfläche

Für die Geschwindigkeitsverteilung der Emissionsstromdichte aus der Kathodenoberfläche folgt aus der Theorie der thermischen Elektronenemission unter den üblichen Voraussetzungen

$$(3.1) \qquad dj_{ro} = j_o \frac{m^2}{2\pi k^2 T^2} \exp\left(-\frac{m}{2kT} v_o^2\right) v_{ro} d^3 v_o .$$

Dabei ist nach Richardson und Dushman

$$(3.2) \qquad j_o = \iiint dj_{ro} = AT^2 \exp(-\Phi_A/kT) \text{ mit } A = 4\pi emk^2/h^3$$

die zur Kathodenoberläche senkrechte Emissionsstromdichte und $dj_{ro}$ derjenige Anteil dieser Stromdichte, dessen Vektor $\vec{v}_o$ der Austrittsgeschwindigkeit seinen Endpunkt im Volumenelement $d^3\vec{v}_o$ des Geschwindigkeitsraumes hat.

### 3.2.2 Die Kugeldiode

In der von Porter et al. 1972 angegebenen Lösung für die Kugeldiode werden im Geschwindigkeitsraum die Koordinaten $E_{ro} = (m/2) v_{ro}^2$ und $L_o = m r_o \sqrt{v_o^2 - v_{ro}^2}$ eingeführt. Da die Geschwindigkeitsverteilung (3.1) rotationssymmetrisch um die Oberflächennormale ist, also nicht vom Azimut der zur Ober-

fläche parallelen Komponente der Austrittsgeschwindigkeit abhängt, wird die Verteilung (3.1) über dieses Azimut integriert. Man erhält

$$(3.3) \qquad dj_{ro} = \frac{j_o}{mk^2T^2r_o^2} \exp\left(-\frac{1}{kT}\left(\frac{L_o^2}{2mr_o^2} + E_{ro}\right)\right) L_o dL_o dE_{ro} .$$

$L_o$ ist der Betrag des Anfangsdrehimpulses eines Elektrons in Bezug auf den Mittelpunkt der Kugelkathode und $E_{ro}$ der von der Radialkomponente $v_{ro}$ der Anfangsgeschwindigkeit herrührende Anteil der kinetischen Anfangsgeschwindigkeit. Aus der Kugelsymmetrie der Anordnung folgen Erhaltungssätze für den Drehimpulsvektor $\vec{L}$ und seinen Betrag $L=L_o$, sowie für die Energie E. Die Bewegung erfolgt in der auf $\vec{L}$ senrechten Ebene durch den Kugelmittelpunkt. Es gilt also

$$(3.4) \qquad E = E_r + (L^2/2mr^2) - eU(r) .$$

Für die kinetische Radialenergie $E_r$ gilt damit, wenn die Kathode auf dem Potential $U(r_o)=0$ liegt,

$$(3.5) \qquad E_r = (m/2)v_r^2 = E_{ro} + \frac{L^2}{2m}\left(\frac{1}{r_o^2} - \frac{1}{r^2}\right) + eU(r).$$

Wie bei der Behandlung der Bewegung eines Teilchens in einem Zentralfeld üblich, wird die "effektive potentielle Energie"

$$(3.6) \qquad F(r,L) = \frac{L^2}{2m}\left(\frac{1}{r_o^2} - \frac{1}{r^2}\right) + eU(r)$$

eingeführt.

Für den Beitrag $d\sigma$ des Stromdichtelements $dj_{ro}$ nach (3.3) zur Ladungsdichte $\sigma(r)$ folgt wegen der Erhaltung des Stromes

(3.7) $r_o^2 j_{ro} = r^2 dj_r = -r^2 v_r d\sigma$

aus (3.3) und (3.5):

$$(3.8)\qquad d\sigma = -\frac{j_o}{k^2T^2r^2}\,\frac{\exp(-\frac{1}{kT}(\frac{L^2}{2mr_o^2}+E_{ro}))LdLdE_{ro}}{\sqrt{2m(E_{ro}+\frac{L^2}{2m}(\frac{1}{r_o^2}-\frac{1}{r^2})+eU(r))}}$$

Die gesuchte Ladungsdichte $\sigma(r)$ folgt daraus durch Integration über $E_{ro}$ und L. Zur Erleichterung der Integration über $E_{ro}$ substituieren wir

$$(3.9)\qquad E_{ro} = -F(r,L) + kTu^2 \qquad (u \geq 0).$$

Damit wird aus (3. 8)

$$(3.10)\qquad d\sigma = Q(r,L)\exp(-u^2)dLdu,$$

wobei

$$(3.11)\qquad Q(r,L) = -\left(\frac{2j_o}{r^2kT}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2mkT}}\right)\exp(-\frac{1}{kT}(\frac{L^2}{2mr^2}-eU(r)))L$$

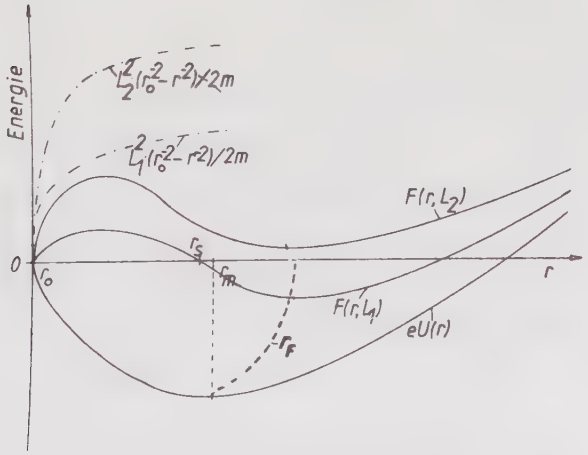



Abb. 5: Verlauf der effektiven potentiellen Energie F(r,L) für verschiedene Drehimpulse $L_1$ und $L_2$ (nach Porter et al.). Es ist $F(r_f(L(_1),L_1)<0$, $F(r_f(L_2),L_2)>0$;

Die Integration von (3.10) über u ist nun möglich, aber die Integrationsgrenzen hängen von r und L ab. Zur Diskussion dieser Integrationsgrenzen betrachten wir die Abhängigkeit der Funktion $F(r,L)$ von r und L (Abb. 5). Für hinreichend kleine Werte von L hat $F(r,L)$ zunächst im Intervall $0<r<r_s$ positive Werte, nimmt dann für $r>r_s$ negative Werte an, um dann nach Durchlaufen eines Minimum bei $r=r_f$ wieder anzusteigen. Ein solcher Verlauf ist in Abb. 5 als $F(r,L_1)$ qualitativ dargestellt. Damit ein Elektron auf seinem Weg zur Anode das Minimum bei $r=r_f$ überwinden kann, muß $E_{ro}>-F(r_f,L)$ sein. Liegt dagegen $E_{ro}$ im Intervall $0\leq E_{ro}<-F(r_f,L)$, so wird das Elektron im Intervall $r_s\leq r<r_f$ an der Stelle r umkehren, wo $E_{ro}=-F(r,L)$ ist. Es gibt also für jeden vorgegebenen hinreichend kleinen Wert von L drei qualitativ verschiedene Intervalle für r:

I $\quad r_o < r \leq r_s$;

II $\quad r_s < r \leq r_f$;

III $\quad r > r_f$.

Im Intervall I tragen nicht nur diejenigen Elektronen zur Raumladung bei, deren kinetische Anfangsenergie ausreicht, um das effektive Potential bei $r=r_f$ zu überwinden, d.h. für die $-F(r_f,L)<E_{ro}<\infty$, also $F(r,L)-F(r_f,L)<kTu^2<\infty$ ist, sondern auch diejenigen, die im Intervall II umkehren, für die also $0<E_{ro}<-F(r_f,L)$, also $F(r,L)<kTu^2<F(r,L)-F(r_f,L)$ ist, letztere sogar zweimal, nämlich auf dem Hin- und Rückweg.

Im Intervall I ergibt die Integration von (3.10) über u also

$$R(r,L) := \frac{1}{Q(r,L)}\,\frac{d\sigma}{dL} = \int_{u_1}^{\infty} e^{-u^2}du + 2\int_{u_2}^{u_1} e^{-u^2}du \ .$$

wobei zur Abkürzung

$$u_1 := \sqrt{(F(r,L)-F(r_f,L))/kT} \quad ; \; u_2 := \sqrt{F(r,L)/kT} < u_1$$

gesetzt ist. Mit dem Gauß'schen Fehlerintegral
$\mathrm{erf}(x)=(2/\sqrt{\pi}) \int_0^x \exp(-t^2)dt$ wird also

$$(3.12) \qquad R(r,L) = (\sqrt{\pi}/2)\left[1-2\mathrm{erf}(u_2) + \mathrm{erf}(u_1)\right].$$

Wir stellen die Integration über den Drehimpuls zunächst zurück.

Im Intervall II tragen ebenfalls ausser den Elektronen, für die $u>u_o$ ist, diejenigen zur Raumladung bei, für die $E_r+F(r,L)>0$, d.h. $u>0$, aber $u<u_1$ ist, und zwar auf dem Hin- und Rückweg. Es ist also

$$(3.13) \qquad R(r,L) = \int_{u_1}^{\infty} e^{-u^2}du + 2\cdot\int_{u_2}^{u_1} e^{-u^2}du = (\sqrt{\pi}/2)\left[1+\mathrm{erf}(u_1)\right].$$

Im Intervall III gibt es nur Elektronen, für die $u>u_1$ ist, d.h. es ist

$$(3.14) \qquad R(r,L) = \int_{u_1}^{\infty} e^{-u^2}du = (\sqrt{\pi}/2)\left[1-\mathrm{erf}\ u_1\right].$$

Es bleibt nur noch die Integration über den Drehimpuls L auszuführen. Diese Integration erfolgt jeweils über das Intervall $[o, \infty]$ unabhängig vom Vorzeichen des effektiven Potentials. Zunächst führen wir mit

$$(3.15) \qquad s = L^2/(2mkTr_o^2); \; LdL = mr_o^2kTds$$

eine für eine weitere Integration geeignete Substitution ein. Wir erhalten dann mit $L(s) = \sqrt{2mr_o^2kTs}$

$$(3.16)\qquad \sigma(r) = -j_0\sqrt{\frac{2m}{kT}}(r_0/r)^2 \int_0^\infty \exp(-s)\exp\left(\frac{1}{kT}F(r,L(s))\right)R(r,s)\,ds$$

mit

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi}R(r,s)=\begin{cases} 1 + \operatorname{erf}\sqrt{(F(r,L)-F(r_f,L))/kT} - 2\operatorname{erf}\sqrt{F(r,L)/kT}, & 0\leqslant r<r_s(s) \\ 1 + \operatorname{erf}\sqrt{(F(r,L)-F(r_f,L))/kT}\ , & \text{wenn } r_s(s)\leq r<r_f \\ 1 - \operatorname{erf}\sqrt{(F(r,L)-F(r_f,L))/kT}\ , & \text{wenn } r>r_f(s) \text{ oder } F(r_f,L)\geq 0 \end{cases}$$

Da das Integral in (3.16) vom Typ $\int_0^\infty \exp(-s)f(s)\,ds$ ist, läßt es sich am genauesten mit den Gauß-Laguerre-Quadraturformeln (Abramowitz und Stegun) auswerten. Bevor wir dies tun, wollen wir nunächst den Grenzfall großer Krümmungsradien von Kathode und Anode, d.h. $r, r_0 \to \infty$, $r-r_0 \ll r$ betrachten. Dabei wird $(r/r_0) \to 1$, $F(r,L) \to eU(r)$, $r_s \to 0$, $r_f \to r_m$. Die Integration über s in (3.16) kann nun leicht analytisch ausgeführt werden. Das Raumladungsgebiet wird nur noch in zwei Bereiche unterteilt, die durch das Potentialminimum getrennt werden. Aus (3.16) erhalten wir nun

$$(3.17)\ \sigma(r)=\begin{cases} -j_0\sqrt{\frac{\pi m}{2kT}}\exp\left(\frac{eU(r)}{kT}\right)\left[1+\operatorname{erf}\sqrt{(U(r)-U(r_m))/(e/kT)}\right]; & (r\leq r_m) \\ -j_0\sqrt{\frac{\pi m}{2kT}}\exp\left(\frac{eU(r)}{kT}\right)\left[1-\operatorname{erf}\sqrt{(U(r)-U(r_m))/(e/kT)}\right]; & (r>r_m)\ . \end{cases}$$

Dies sind die Raumladungsformeln für die planare Diode (Langmuir, 1923). Voraussetzung für die Berechnung von $\sigma(r)$ längs jeder der in 3.2 erwähnten Bahnen ist die Kenntnis der für die jeweilige Bahn geltenden Potentialverteilung $U_j(r)$. Diese erhält man aus der Lösung der Poisson-Gleichung im vorangegangenen Iterationszyklus, wie in Abschnitt 2 beschrieben.

### 3.2.3 Numerische Auswertung der Raumladungsformeln

Für die numerische Auswertung der Gln. (3.16) und (3.17) verwenden wir eine rationale Approximation nach Abramowitz und Stegung. Wir definieren zunächst

$$(3.18)\quad \begin{cases} y(r,s) = (1/kT)F(r,\sqrt{2mr_o^2kTs}\,) \\ y_f(s) = (1/kT)F(r_f,\sqrt{2mr_o^2kTs}\,) \\ q(r,s) = 1/(1 + p\sqrt{y - y_f}) \\ t(r,s) = 1/(1 + p\sqrt{y}) \\ p = 0.3275911\ . \end{cases}$$

Mit Gln. (3.18) gilt mit einer Genauigkeit von $1.5 \cdot 10^{-7}$

$$\operatorname{erf}\sqrt{y-y_f} = 1-(a_1q+a_2q^2+a_3q^3+a_4q^4+a_5q^5)\exp(y_f-y)$$

$$a_1 = 0.254829592 \qquad a_2 = -0.284496736$$

$$a_3 = 1.421413741 \qquad a_4 = -1.453152027$$

$$a_5 = 1.061405429.$$

Damit wird mit der Abkürzung $c(r)=-j_o(r_o/r)^2\sqrt{\frac{\pi m}{2kT}}$ aus (3.16)

$$\sigma(r) = (2/\sqrt{\pi})c(r)\int_0^\infty \exp(-s+y(r,s))R(r,s)ds, \text{ wobei}$$

$$(3.19)\quad \frac{2}{\sqrt{\pi}}R(r,s)=\begin{cases} 2e^{-y}\sum_{k=1}^{5}a_kt^k - \exp(y_f-y)\sum_{k=1}^{5}a_kq^k & (0\leqslant r<r_s(s)) \\ 2 - \exp(y_f-y)\sum_{k=1}^{5}a_kq^k & (r_s(s)\leqslant r<r_f) \\ \exp(y_f-y)\sum_{k=1}^{5}a_kq^k & (r\geqslant r_f(s) \text{ oder } F(r_f,L)>0) \end{cases}$$

Gl. (3.19) wird nun mit Hilfe der Laguerrschen Quadraturformel vom Grade 15 numerisch integriert. Die Raumladungsdichte läßt sich dann durch

$$(3.20)\quad \sigma(r) = 2/\sqrt{\pi}\ c\sum_{i=1}^{15}w_i\exp(y(r,s_i))R(r,s_i)$$

approximieren. Die Stützstellen $s_i$ (i=1...15) sind hierbei die Nullstellen des Laguerre-Polynoms $L_{15}(s)$, die Gewichte sind

$$w_i = ((15!)^2 s_i)/(16^2 (L_{16}(s_i))^2).$$

### 3.2.4 Berechnung der Raumladung im Bereich laminarer Strömung

Wir hatten vorausgesetzt daß ein Wert $r=r_k$ existiert, so daß für $r \leq r_k$ die Feldstärke praktisch nur eine Radialkomponente besitzt und für $r>r_k$ die Elektronenströmung als laminar behandelt werden kann, bisher aber noch kein Kriterium für die Bestimmung von $r_k(\vartheta_j)$ angegeben. Dies soll nun durch die Forderung geschehen, daß für alle $r<r_k$ die Tangente an diejenige Stützbahn $\vec{r}(r)$, die die Kathodenoberfläche bei $\vartheta = \vartheta_j$ mit der radialen Anfangsgeschwindigkeit $\sqrt{4kT/m}$ verläßt, die z-Achse in einem Abstand $\varepsilon < r_0/4$ schneidet (vergl. Abb. 6 a und b).

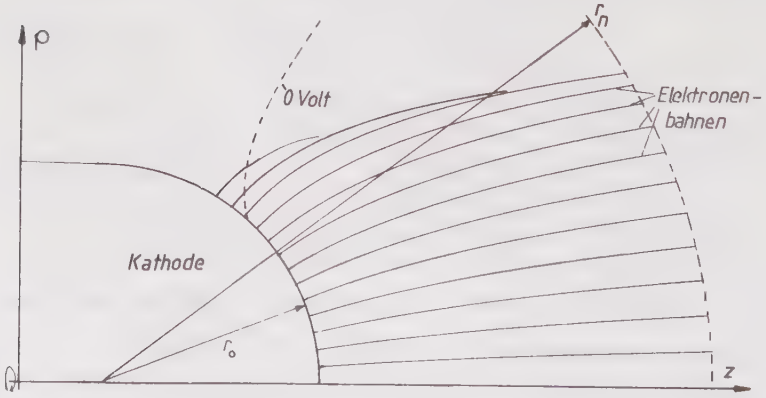



Abb. 6a: Zur Bestimmung der Strahldivergenz werden auf der Kathodenoberfläche senkrecht startende meridionale Elektroenbahnen berechnet.

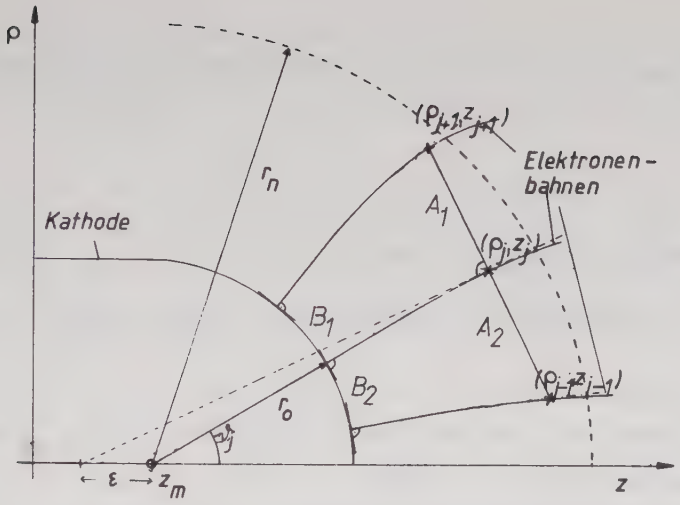



Abb. 6 b: Die Strahldivergenz wird aus den Kegelstumpfmantelflächen $A_1$, $A_2$ und den Kugelzonenflächen $B_1$ und $B_2$ bestimmt.

Für $r > r_k$ würde in einer stationären laminaren Elektronenströmung die Kontinuitätsgleichung

(3.21) $\quad \operatorname{div} \vec{j} = -\operatorname{div} (\sigma \vec{v}) = 0$

gelten. In laminaren Strömungen verwendet man den Begriff der Stromröhre, deren Wandung durch eine Schar von Elektronenbahnen gebildet wird. Aus der Kontinuitätsgleichung und dem Gaussschen Integralsatz folgt die Konstanz des Elektronenstroms $\int \vec{j}\, d\vec{F} = jF$ innerhalb jeder Röhre. Dabei ist F die zu den Bahnen senkrechte Querschnittsfläche der Röhre. Betrachten wir insbesondere diejenige Röhre, in der sich alle Elektronenbahnen befinden, die die Kathodenoberfläche zwischen den Winkeln $\vartheta_{j-1}$ und $\vartheta_{j+1}$ mit einer zur Katho-

denoberfläche senkrechen Anfangsgeschwindigkeit $\sqrt{4kT/m}$ verlassen haben, so gilt auch für diese $F_j = F_k j_k$. Dabei ist

(3.22) $$F_k = 2\pi r_k^2(\cos\vartheta_{j-1} - \cos\vartheta_{j+1})$$

die Querschnittsfläche der Röhre bei $r=r_k$.

(3.23) $$F \approx \pi(\rho_{j+1} + \rho_{j-1})\sqrt{(z_{j+1}-z_{j-1})^2 + (\rho_{j+1}-\rho_{j-1})^2}$$ ist

ein Näherungsausdruck für die Querschnittsfläche, die man erhält, wenn man an der Stelle $(\rho_j, z_j)$ den zu der j-ten Elektrenenbahn senkrechten Kegel mit der Stromröhre zum Schnitt bringt. $\rho_{j+1}$, $z_{j+1}$, $\rho_{j-1}$ und $z_{j-1}$ kennzeichnen die Koordinaten der Schnittpunkte dieses Kegels mit der (j-1)-ten bzw. (j+1)-ten Bahn. Definieren wir einen "Divergenzfaktor"

(3.24) $$D := F_k/F,$$

so gilt also

(3.25) $$j = D j_k.$$

Zur Berechnung der Elektronenbahnen formen wir die Lorentzsche Bewegungsgleichung für ein Elektron der Masse m und der Ladung -e in einem elektrostatischen Feld $\vec{E} = -\text{grad } U(\vec{r})$ in nicht relativistischer Näherung

(3.26) $$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = e \text{ grad } U(\vec{r}).$$

Es ist nun durch eine Maßstabstransformation in der unabhängigen Koordinate (Kapser, 1982)

(3.27) $$\tau := \sqrt{2e\tilde{U}/m}\, t$$

mit einer konstanten Spannung $\tilde{U}$, über die noch geeignet verfügt werden kann. Gl. (3.26) wird dann

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\vec{r} = \frac{1}{2\tilde{U}} \operatorname{grad} U(\vec{r}). \tag{3.28}$$

Eine sinnvolle Wahl für $\tilde{U}$ ist das Potential, welches das Elektron für $r = r_n$ besitzt. $\tau$ hat dann die Dimension einer Länge. Aus Gl. (3.28) folgt durch Integration der Energiesatz

$$\left(\frac{d\vec{r}}{d\tau}\right)^2 = \frac{eU(r) + E_o}{e\tilde{U}} \quad . \tag{3.29}$$

Aus der Beziehung (3.29) erhält man den Anfangswert von

$$|d\vec{r}/d\tau| = \sqrt{E_o/e\tilde{U}}\,.$$

Zur numerischen Integration werden die Dgln. (3.28) in ein System von Dgln. erster Ordnung umgewandelt und anschließend mit Hilfe von Hammings modifiziertes Prädiktor-Korrektor-Verfahren integriert (Ralston und Wilf, 1970). Dabei wurde eine benutzerfreundliche Subroutine mit einem verbesserten Prädiktor (Kasper, 1982 I) eingesetzt.

Wir berechnen nun durch Lösung der Gl. (3.27) nach dem oben angegebenen Verfahren $N_B$ Teilchenbahnen, die mit der mittleren Energie von $E_o = 2kT$ (vgl. Anhang) senkrecht auf der Kathode an den Stellen $\vartheta_j$ $(j=1,\ldots,N_B)$ starten. Der Divergenzfaktor D wird nach (3.22) bis (3.24) berechnet. Wir können uns nun bei der Berücksichtigung der Raumladung auf ein relativ kleines Gebiet von $r \leq r_n \leq 3.5 r_o$ vor der Kathode beschränken, weil die Raumladungsdichte stark in der Nähe der Kathodenoberfläche konzentriert ist. Vor allem am Bündelrand können dabei Überschneidungen von Stützbahnen vorkommen. Um dennoch eine eindeutige Ladungsdichtefunktion $\sigma(r)$ zu erhalten und die Bedingung für laminare Strömung nicht zu ver-

letzen, wird immer dann, wenn ein Volumenbereich doppelt von Bahnen überdeckt wird, der Beitrag derjenigen Bahn zur Ladungsdichte nicht berücksichtigt, die bei dem größeren der beiden zugehörigen $\vartheta_j$-Werte beginnen. Die Bahnkoordinaten von mindestens 101 in Bezug auf die unabhängige Variable $\tau$ äquidistant liegenden Bahnpunkte werden abgespeichert. Mit Hilfe der benachbarten Elektronenbahnen für j-1 und j+1 kann nun aus (3.22) und (3.23) entlang der Bahn für j der Divergenzfaktor D berechnet werden. Statt Gl. (3.25) verwenden wir aber eine aus der für die ebene Diode geltende Gleichung (3.17) für $r>r_m$ folgende Beziehung, die im Gegensatz zu (3.25) die Verteilung der Anfangsgeschwindigkeiten wenigstens teilweise berücksichtigt. Mit der für große Werte von x gültigen asymptotischen Reihenentwicklung

$$(3.30)\qquad 1-\mathrm{erf}(x) = \frac{\exp(-x^2)}{x\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{2x^2} + O(x^{-4})\right)$$

folgt aus (3.17) unter Vernachlässigung der Glieder $\geq O(k^2T^2)$

$$(3.31)\qquad \sigma(r) = -j_o\sqrt{\frac{m}{2e(U(r)-U(r_m))}}\exp\left(\frac{eU(r_m)}{kT}\right)\left(1- \frac{kT}{2e(U(r)-U(r_m))}\right).$$

Unter der Annahme daß wie bei der ebenen Kathode $j_k = j_o\exp(eU(r_m)/kT)$ gilt, folgt weiter

$$(3.32)\qquad \sigma(r) = -j_k\sqrt{\frac{m}{2e(U(r)-U(r_m))}}\left(1- \frac{kT}{2e(U(r)-U(r_m))} + O(k^2T^2)\right).$$

Der erste, von kT unabhängige Summand kann wegen

$$(3.33)\qquad v \approx \sqrt{2eU(r)/m} \approx \sqrt{2e(U(r)-U(r_m))/m}$$

als $-j_k/v$ geschrieben werden. Bei Vernachlässigung der von kT abhängigen Summanden würde also die Beziehung

(3.34) $\sigma(r) = -j(r)/v = -j_k/v \Rightarrow j(r) = j_k$

folgen, d.h. die Konstanz der Stromdichte in der ebenen Diode. Da wir es im vorliegenden Fall aber nicht mit einer ebenen Diode, sondern einer Elektronenströmung in einer Röhre von veränderlichem Querschnitt zu tun haben, für die näherungsweise (3.25) gilt, modifizieren wir (3.17) durch Multiplikation mit dem ortsabhängigen Divergenzfaktor D, d.h. wir verwenden die Beziehung

$$(3.35)\quad \sigma(r) = -j_o\sqrt{\frac{\pi m}{2kT}}\, D\, \exp\left(\frac{eU(r)}{kT}\right)\left(1 - \operatorname{erf}\sqrt{e(U(r)-U(r_m))/kT}\right),$$

um daraus die Raumladungsdichte entlang jeder der Bahnen in den bezüglich $\tau$ äquidistant liegenden Bahnpunkten zu berechnen. Bei der Berechnung dieser Stützbahnen wird mit zunehmendem $\vartheta_j$ schließlich eine Bahn mit $\vartheta \geq \vartheta_e$ erreicht (vergl. Abb.4) für die die Anfangsenergie 2kT nicht mehr ausreicht, das Potentialminimum vor der Kathode zu überwinden. Diese Bahn kehrt also um. Nach dem Kriterium für die Bestimmung von $r_k$ würde in diesem Fall also $r_k < r_m$. Das oben skizzierte Verfahren zur Bestimmung der Raumladungsdichte $\sigma$, das $r_k > r_m$ voraussetzt, würde also versagen. In der Annahme daß die "umkehrenden" Elektronen (die nicht notwendig alle wieder auf der Kathode landen), zur Raumladungsdichte nur wenig beitragen, werden bei der Ladungsdichteberechnung nur diejenigen Stützbahnen berücksichtigt, für die $r_k > r_m$ ist oder die kein Potentialminimum durchlaufen. Der größte Wert des Index $j$, für den noch $r_k > r_m$ ist, ist also gleich der Zahl $N_B$ der berücksichtigten Bahnen und der Startort $\vartheta_{N_B+1}$ für den sich die erste umkehrende Stützbahn ergibt, wird mit $\vartheta_e$ identifiziert.

Die Raumladungsdichte ist jetzt entlang von $N_B$ orthogonal startenden Stützbahnen bekannt. Die Werte von $\sigma$ und $\vartheta$ in den Schnittpunkten der Stützbahnen mit den Kugeln $r=r_i$ werden durch Interpolation be stimmt. Für $r<r_k$ wird die Raumladungsdichte aus (3.16) an den Stützstellen der Summationsformel (2.51) berechnet. Die Raumladungsdichte $\sigma(r_i, \vartheta^*_j)$ wird so direkt in den Maschenpunkten des in Abb. 3 dargestellten Maschennetzes berechnet. Anschließend werden die $\sigma(r_i, \vartheta^*_j)$ für alle $r>r_k$ aus den zuvor berechneten und abgespeicherten Werten von $\sigma(r_i, \vartheta_j)$ durch Interpolation ermittelt. Da im Raum außerhalb der letzten Stützbahn ($j=N_B$) einerseits das oben beschriebene Verfahren versagt, bei dem im Intervall $r_o<r<r_k$ Gleichung (3.16) und für $r>r_k$ Gl. (3.35) verwendet wird, andererseits aber in der Nähe der Kathodenoberfläche noch Raumladungen auftreten können, wird dort auch Gl. (3.16) verwandt. Hat die Funktion $F(r,L)$ im Intervall $r_o<r<r_n$ kein Minimum, so wird in (3.16) $F(r_f,L)$ durch $F(r_n,L)$ ersetzt. Oberhalb eines je nach Form der Kathode zu wählenden $\vartheta_g > \pi/2$ wird $\sigma(\vartheta) = \sigma(\vartheta_g)$ für $\vartheta > \vartheta_g$ gesetzt.

Die Interpolation in den für die Lösung der Poissongleichung vorgegebenen Stützpunkten $\vartheta^*_j$ erfolgt dabei jeweils durch eine nichtäquidistante Vier-Punkte-Lagrange-Interpolation nach der Newtonschen Interpolationsformel (Stoer, 1976). In Abb. 7 wird die Interpolation der Raumladung in die Punkte des Maschennetzes veranschaulicht. Die Raumladungsdichte aus der Trajektorienmethode wird bei $r=r_k$ stetig an das Kugeldiodenmodell angepaßt. Im allen behandelten Beispielen war $r_k \geq 1.1\ r_o$. Es steht also nichts im Wege, unabhängig von $\vartheta_j$ $r_k=1,1\ r_o$ zu wählen, wenn das Potential kein Minimum besitzt.

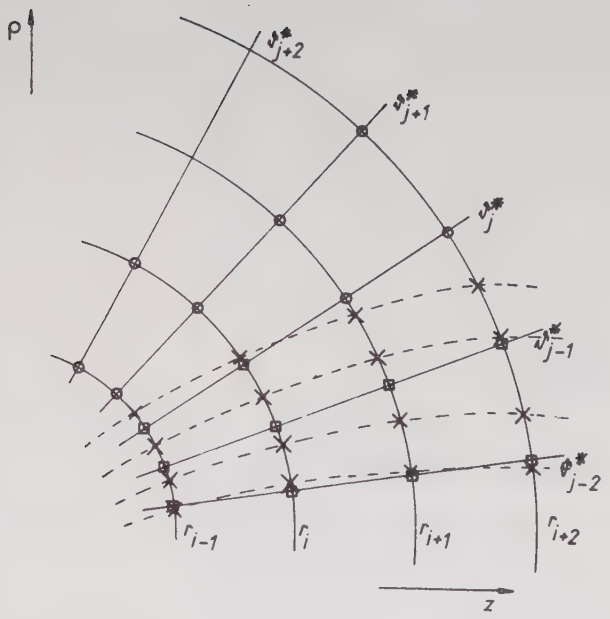



Abb. 7: Interpolation der Raumladung in den Knoten des Maschennetzes vor der Kathode

----- Bahnverlauf

x Punkte in denen die Raumladung durch Lagrange-interpolation entlang einer Stützbahn gewonnen wird;

o Punkte, in denen die Raumladung nach (3.16) berechnet wird.

□ Punkte in denen aus den Werten in den Punkten x und o interpoliert wird.

### 3.2.5 Ablauf des Gesamtverfahrens

Mit den bisher in Abschnitt 3.2 beschriebenen Verfahren können wir die Raumladungsdichte bestimmen, mit den in Kapitel 2 angegebenen Methoden lösen wir das zugehörige Dirichletsche Randwertproblem. Wir berechnen nun in einem Iterationsverfahren abwechselnd die Raumladungsdichte und das Potential. Das Verfahren beginnt mit einer Lösung der Laplacegleichung. Die Iteration wird so lange fortgeführt, bis die maximale Änderung

$$(3.36)\quad \delta^{(\nu)} := \max_{r_i,\vartheta_j} \left| \frac{\delta^{(\nu)} - \delta^{(\nu-1)}}{\delta^{(\nu)} + \delta^{(\nu+1)}} \right| < \delta$$

eine Fehlerschranke $\delta$ unterschreitet. Dabei bezeichnet $\nu = 1,2\ldots$ die Nummer der Iteration. Falls $\sigma^{(\nu)}$ und $\sigma^{(\nu-1)}$ beide verschwinden, ist in (3.36) für den Bruch der Wert Null einzusetzen. Zur Beschleunigung der Konvergenz des Iterationsverfahrens wird an Stelle der zunächst berechneten Raumladungsdichte $\sigma^{(\nu+1)}$ eine durch

$$(3.37)\quad \tilde{\sigma}^{(\nu+1)}(r,\vartheta) = \sigma^{(\nu)}(r,\vartheta) + \omega\,(\sigma^{(\nu+1)}(r,\vartheta) - \sigma^{(\nu)}(r,\vartheta)) \quad (0<\omega<1)$$

definierte "unterrelaxierte" Raumladungsdichte verwendet und anschließend wieder mit $\sigma^{(\nu+1)}(r_i,\vartheta_j)$ bezeichnet. $\omega$ wird als Unterrelaxationsfaktor bezeichnet. Abb. 8 zeigt ein Flußdiagramm für das Gesamtverfahren.

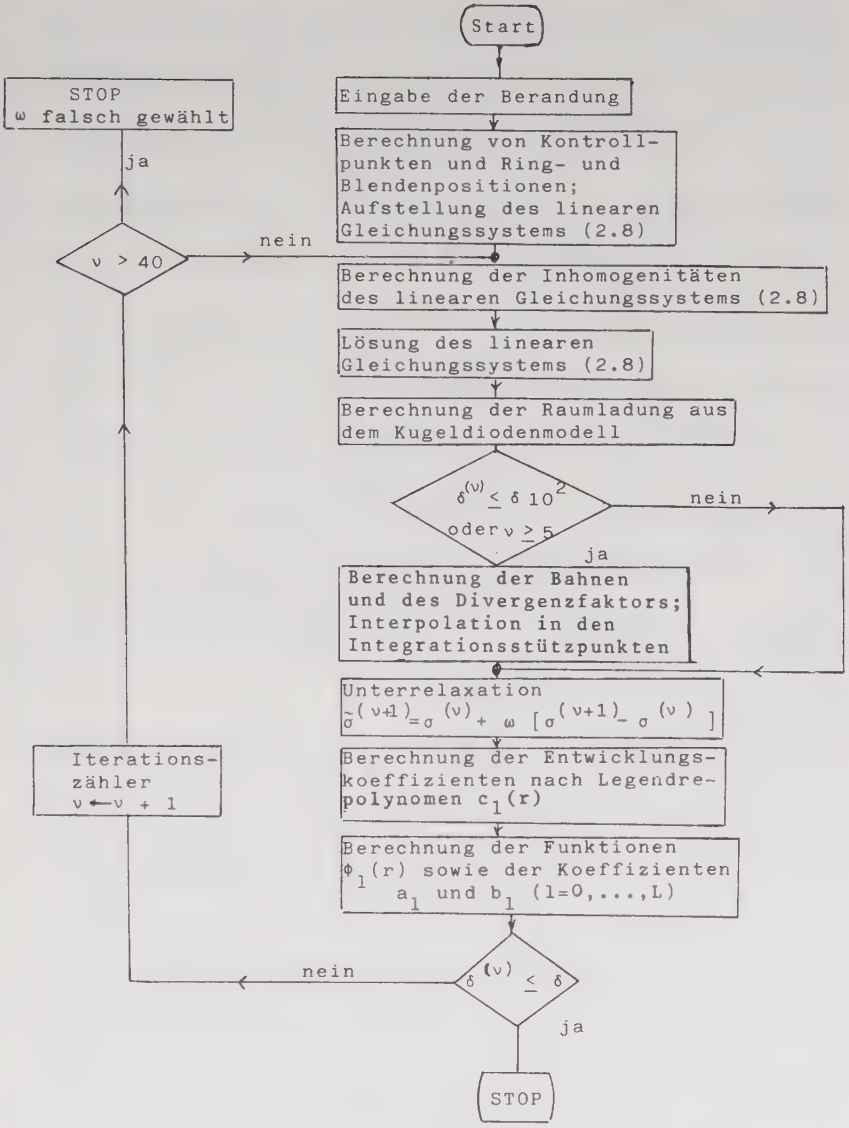



Abb. 8: Die iterative Berechnung der Raumladungsdichte

## 3.3 Untersuchungen an der Kugeldiode

Das oben beschriebene Verfahren soll nun auf das Beispiel der Kugeldiode angewandt werden. Diese einfache geometrische Anordnung erlaubt, den Einfluß der Raumladung für komplizierte Anordnungen, wie Triodensysteme mit Spitzenkathode qualitativ abzuschätzen und das Konvergenzverhalten des Gesamtverfahrens zu untersuchen.

Die untersuchte Kugeldiode hat einen Kathodenradius von $r_0 = 2.10^{-4}$ m und einen Anodenradius von $r_n = 4 \cdot 10^{-4}$m. Das Anodenpotential beträgt in allen Fällen 1 Volt, die Kathode liegt auf 0 Volt. Die Austrittsarbeit $\phi_A$ des Kathodenmaterials betrage 4.00 eV, die Richardsonkonstante $A = 85\ A/cm^2K$. Die Anordnung wurde für Kathodentemperaturen zwischen 2200 K und 2700 K in 100 K-Schritten untersucht. Die Abbildungen 9 bis 13 zeigen die Ergebnisse der Potential- und Raumladungsberechnung.

Zur Lösung der Poissongleichung wurde die Anzahl der Stützstellen in Gl. (2.6) N=169 gewählt und die Anzahl n=201 der Stützradien gewählt. Die Fehlerschranke $\delta$ wurde auf $10^{-4}$ festgesetzt. Um diese Fehlerschranke zu unterschreiten, wurden jeweils mehr als 17 Gesamtiterationen benötigt. Hierbei wurde eine starke Abhängigkeit des Konvergenzverhaltens vom Unterrelaxationsfaktor $\omega$ festgestellt. Der optimale Wert $\omega_{opt}$ lag zwischen 0.3 und 0.2. Wählt man $\omega$ zu groß, so oszillieren die Werte $\sigma(r_i, \vartheta_j)$ der Raumladung sehr stark mit $\nu$. Bis zur Unterschreitung der Fehlerschranke $\delta$ sind dann über 60 Iterationen notwendig, oder in manchen Fällen konvergiert das Verfahren überhaupt nicht. Wählt man $\omega$ zu klein, so wird die Lösung zu stark gedämpft. Sie zeigt zwar kein oszillatorisches Verhalten, konvergiert aber nur sehr langsam. Weiter-

hin beobachten wir eine starke Abhängigkeit der Anzahl der Iterationen von der Tiefe des Potentialminimums. Im Bereich niedriger Temperaturen, in dem kein Potentialminimum für $r > r_o$ auftritt, konvergiert das Verfahren sehr rasch, und das Konvergenzverhalten hängt nur schwach von der Wahl von $\omega$ ab. Hier wird bereits für $\nu = 14$ die Fehlerschranke $\delta$ unterschritten. Mit zunehmender Temperatur nimmt auch die Tiefe des Potentialminimums und die Anzahl der benötigten Iterationen zu. Bei einer Kathodentemperatur von 2700 K wurden insgesamt 35 Iterationen bis zur Konvergenz benötigt.

Wenn $\omega_{opt}$ bei Beginn der Rechnung nicht bekannt ist, kann man nach einer bestimmten Anzahl von Iterationen das Programm unterbrechen, um $\omega$ zu korrigieren.

Aus den Ergebnissen für die Kugeldiode lassen sich qualitative Rückschlüsse auf Lage und Wert des Potentialminimums auch für kompliziertere Anordnungen mit teilweise sphärischer Kathode ziehen. Das Potentialminimum liegt immer sehr dicht bei der Kathodenoberfläche (Abb. 12). Mit zunehmender Kathodentemperatur nimmt der Wert des Minimums näherungsweise linear ab (Abb. 13). Wie Abb. 9 und 10 verdeutlichen, müssen wir vor der Kathode mit einer sehr hohen Stützstellendichte arbeiten. Für die Distanz h der Stützradien erwies sich ein Wert von $0.02 r_o$ als ausreichend. Eine so kleine Schrittweite ist vor allem wegen der im Bereich $r_o < r < 1.3 r_o$ mit wachsendes r steil abfallenden Raumladungsdichte $\sigma$ notwendig (Abb. 10).

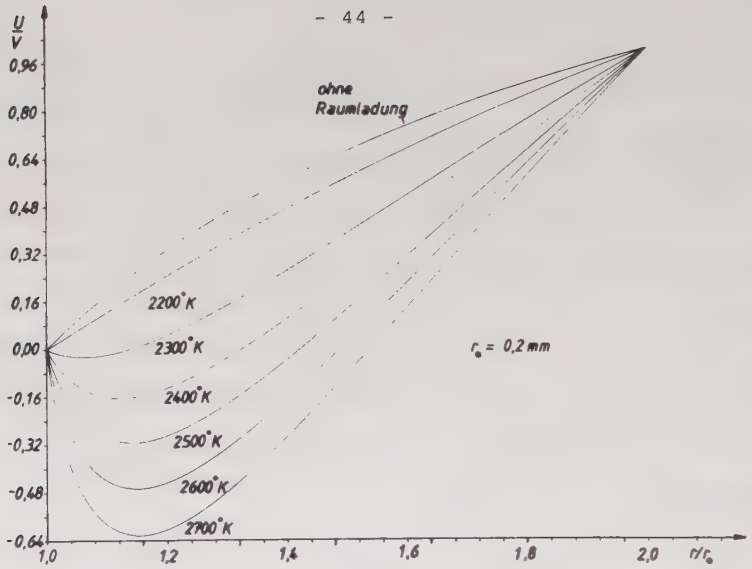



Abb. 9: Verlauf des Potentials in einer Kugeldiode bei verschiedenen Kathodentemperaturen

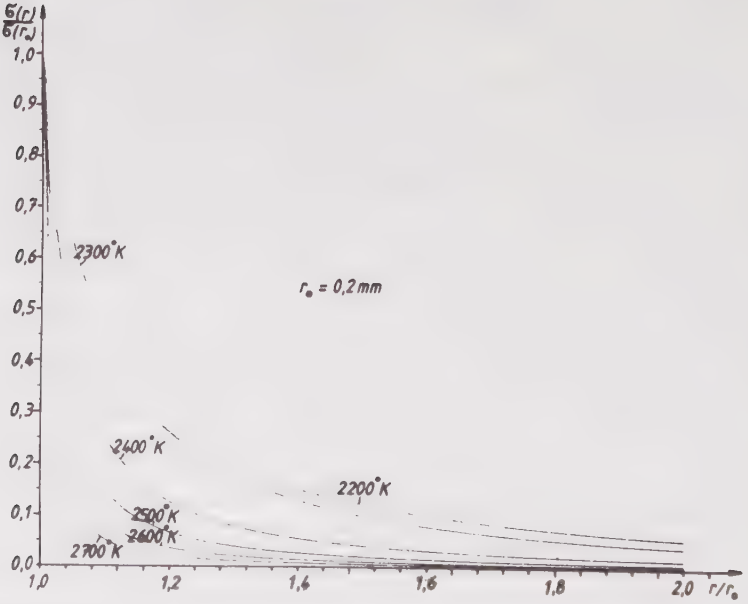



Abb. 10: Verlauf der normierten Raumladungsdichte $\sigma(r)/\sigma(r_o)$ für verschiedene Kathodentemperaturen $T_K$

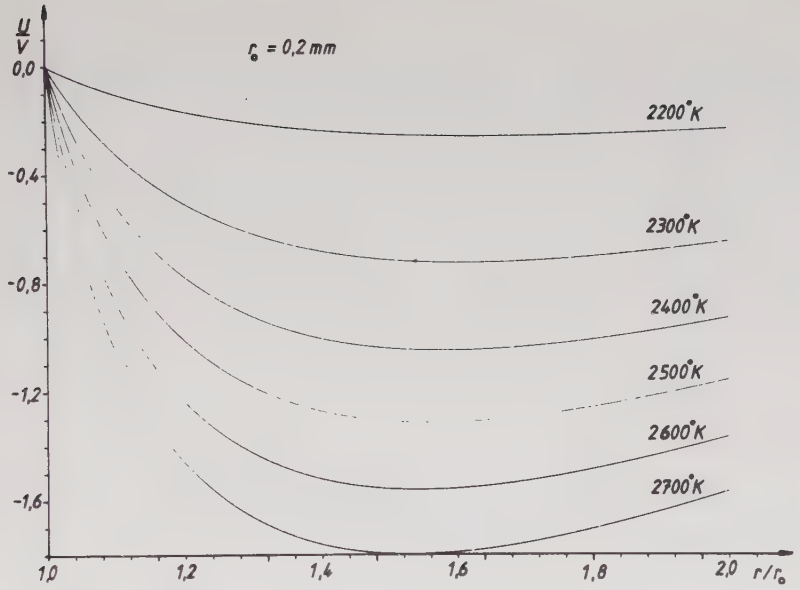



Abb. 11: Verlauf des Potentials W(r) der Raumladung für verschiedene Kathodentemperaturen in einer Kugeldiode.

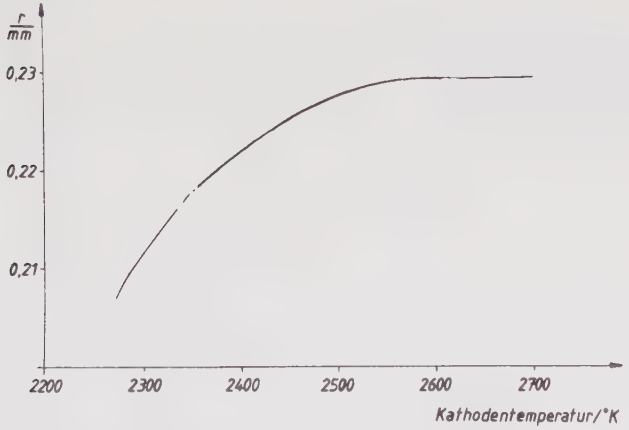



Abb. 12: Lage des Potentialminimums in Abhängigkeit von der Kathodentemperatur in einer Kugeldiode

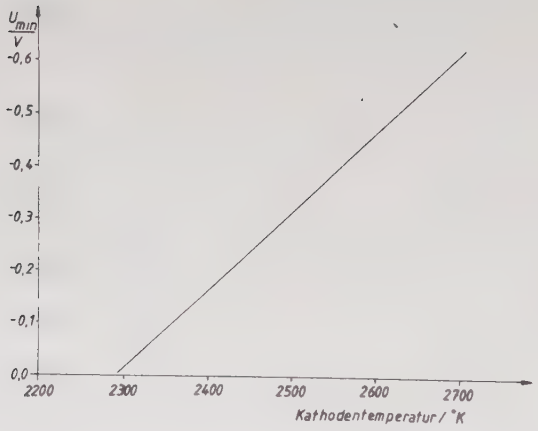



Abb. 13: Wert des Potentialminimums in Abhängigkeit von der Kathodentemperatur in einer Kugeldiode

## 4. Raumladungseffekte in Triodensystemen mit Spitzenkathode

Wir wollen nun ein Triodensystem untersuchen, an dem Lauer (1982) Messungen vorgenommen hat, um später Meßergebnisse und rechnerisch ermittelte Daten vergleichen zu können.
Der Betriebszustand von Triodensystemen kann sehr empfindlich von der axialen Lage der Kathodenspitze abhängen. Diese empfindliche Abhängigkeit des Betriebszustandes von den geometrischen Parametern erschwert den Vergleich von Meßergebnissen mit rechnerisch ermittelten. Im folgenden wird für zwei verschiedene Elektronenstrahlerzeuger I (Abb.14) und II (Abb.34a), für die eine befriedigende Übereinstimmung mit Messergebnissen erzielt werden konnte, die Berechnung der Raumladung und ihr Einfluß auf die Feldverteilung ausführlich diskutiert.

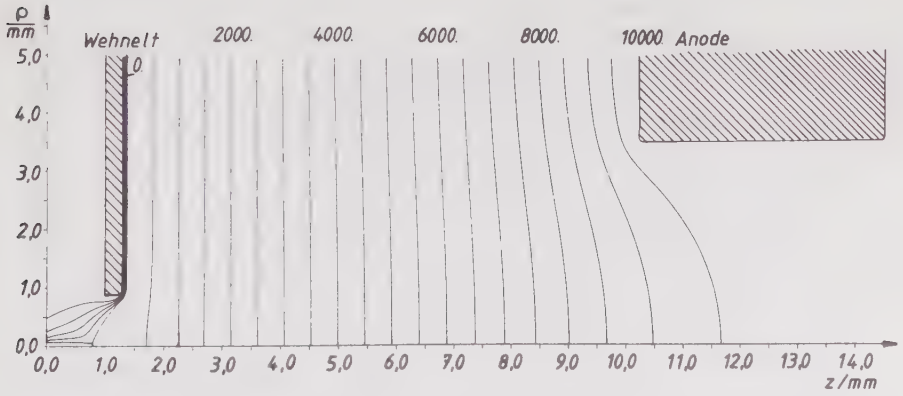



Abb. 14: Strahlerzeuger I mit Äquipotentiallinien ohne Raumladung (Potentialangaben in Volt)

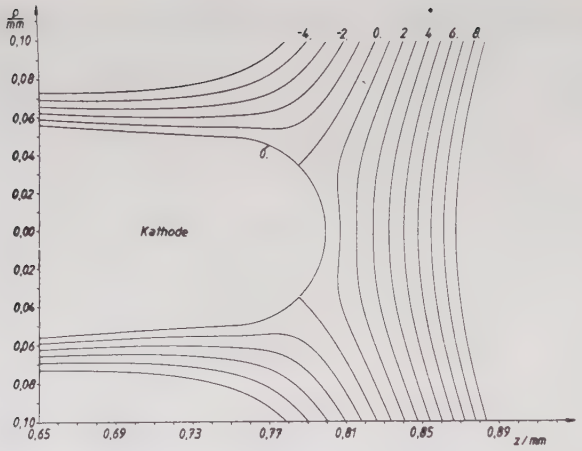



Abb. 15: Äquipotentiallinien in der unmittelbaren Umgebung der Spitzenkathode im Strahlerzeuger I (ohne Raumladung) bei einer Wehneltspannung von $U_W$=-121 V und einer Anodenspannung von 10 kV. Die Kathodenoberfläche ist Teil der Äquipotentialfläche für 0 Volt.

Abb. 14 zeigt die Äquipotentiallinien ohne Raumladung im Strahlerzeuger I. Die Wehneltspannung $U_W$ beträgt -121 Volt, die Anodenspannung 10000 Volt. Die Kathode liegt auf 0 Volt. Die Äquipotentiallinien für U > 0 sind für alle ganzzahligen Vielfache von 500 Volt gezeichnet, die Äquipotentiallinien für U<0 Volt für Vielfache von 20 Volt. Abb. 15 zeigt die Äquipotentiallinien in der Umgebung der Kathodenspitze, ebenfalls ohne Berücksichtigung der Raumladung. Der Krümmungsradius $r_o$ der Spitze beträgt 0,05 mm. Die Kathodenoberfläche ist Teil der Äquipotentialfläche für 0 Volt.

Nach den in den Kapiteln 2 und 3 dargestellten Verfahren wurde das elektrostatische Potential und die elektrische Feldstärke ohne und mit Raumladungseinfluß berechnet. Es

wurde die für Wolfram charakteristische Austrittsarbeit von 4.53 eV, eine Richardsonkonstante von A = 100 $A/cm^2 K$ und verschiedene Kathodentemperaturen $T_K$ angenommen. Bei der Darstellung des Potentialfeldes nach Gl.(2.7) wurden für die Wehneltelektrode und die Anode je zwei Lochblendenterme verwandt. Auf die Kathode wurden 96 Kontrollpunkte gelegt, davon allein 50 Punkte auf die Kathodenspitze. Der maximale Radius des Maschennetzes betrug $r_n = 3.5\ r_o$, wobei n = 200 gewählt wurde.

## 4.1 Ergebnisse der Potential- und Raumladungsberechnung

Nach den in Abschnitt 2 und 3 beschriebenen Verfahren wurde für den Strahlerzeuger I die Potentialverteilung mit und ohne Raumladungseinfluß bei Kathodentemperaturen von 2700 K bis 2900 K für Wehneltspannungen zwischen $U_W$ = -100 V und $U_W$ = -142 V berechnet.

In Abb. 16 ist für $T_k$=2900 K der Verlauf des durch die Raumladung bedingten Potentials $W(r, \vartheta)$ auf der optischen Achse d.h. für $\vartheta$=0 dargestellt. $|W(r,\vartheta)|$ nimmt zunächst mit abnehmendem Betrag der Wehneltspannung zu, und das Minimum von W(r,0) entfernt sich von der Kathodenoberfläche. Wird der Betrag der Wehneltspannung weiter vermindert, so nimmt dann bei $U_W \approx 110$ V die Tiefe des Minimums von W(r,0) wieder ab, d.h. |W(r,0)| wird kleiner.

Die Abbildungen 17 a-b und 18 a-c zeigen den Einfluß der Raumladung auf den Verlauf der Äquipotentiallinien. Typisch ist, daß in Anwesenheit von Raumladung die Nullvoltlinien nicht mehr wie im raumladungsfreien Fall senkrecht in die Kathodenoberfläche einmünden (Abb.17). Der Elektronen emittierende Bereich an der Kathodenspitze wird hierbei ver-

kleinert. Für noch stärker negative Werte der Wehneltspannung wird die Feldstärke vor der Kathode so gering, daß mit wachsender Kathodentemperatur unter dem Einfluß der Raumladung ein Potentialminimum vor der Kathode entsteht (vgl. Abb. 18 a,b und c). Es ist klar, daß bei einer geringeren Kathodentemperatur der Einfluß der Raumladung kleiner wird (vgl. Gl. 3.3). Ein Potentialgebirge schiebt sich wie eine Irisblende vor die Kathode (Abb. 18 d).

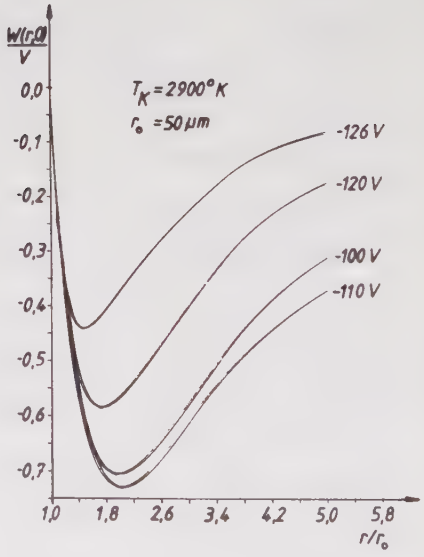



Abb. 16: Der Verlauf des durch die Raumladung bedingten Potentials auf der optischen Achse für verschiedene Wehneltspannungen $U_W$

Diese qualitative Abhängigkeit der Elektronenemission von Kathodentemperatur und Wehneltspannung ist in der Praxis seit langem bekannt. B. v. Borries (1948) hat ausführlich und anschaulich beschrieben, wie man sowohl durch Erhöhung der Kathodentemperatur als auch des Betrages der Wehneltspannung vom "Sättigungsbetrieb" zum "Raumladungsbetrieb" eines Strahlerzeugers übergehen kann. Dabei herrscht im Sättigungsbetrieb in einem Bereich um die Achse eine Feldstärke, die alle emittierten Elektronen absaugt. B.v.Borries zeigt, daß man mit diesen Elektronen ein elektronenoptisches Bild der Kathodenoberfläche in Achsennähe erzeugen kann, das von einer diffusen ringförmigen Raumladungswolke ("Hohlstrahl") umgeben ist, die es dem äusseren Bereich der Kathodenoberfläche stammt, wo die Emission behindert ist. Im Raumladungsbereich zieht sich die ringförmige Wolke behinderter Emission zu einer zentralen Raumladungswolke mit einem Intensitätsmaximum auf der Achse zusammen. Deren Breite und Maximalintensität nimmt mit zunehmendem Betrag der Wehneltspannung ab, bis der Emissionsfleck schließlich bei Erreichen der Sperrspannung ganz verschwindet.

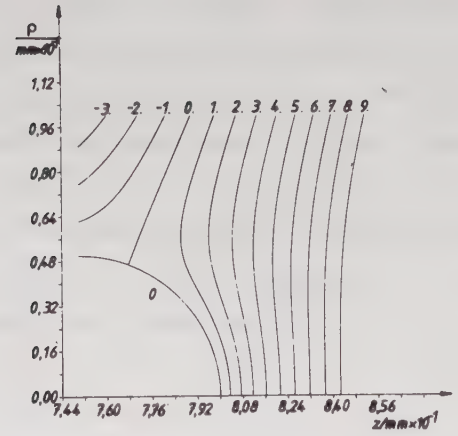



Abb. 17 a: Äquipotentiallinien an der Kathodenspitze ohne Berücksichtigung der Raumladung ($U_W$= -110 V)

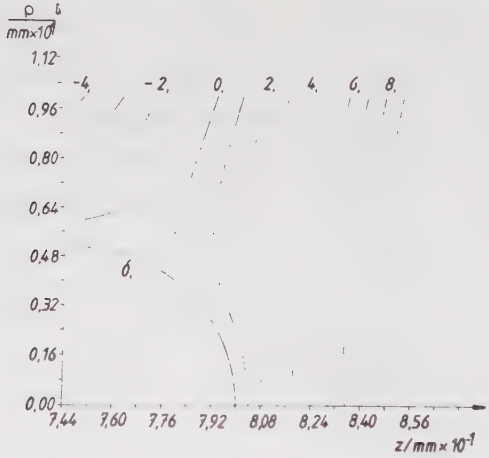



Abb. 17 b: Äquipotentiallinien unter Berücksichtigung der Raumladung ($T_k$=2900 K; $U_W$ = -110 V)

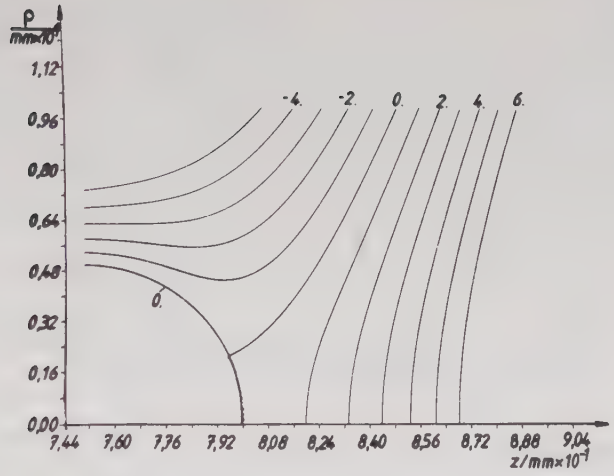



Abb. 18 a: Äquipotentiallinien an der Kathodenspitze ohne Berücksichtigung der Raumladung ($U_W$=-126 V)

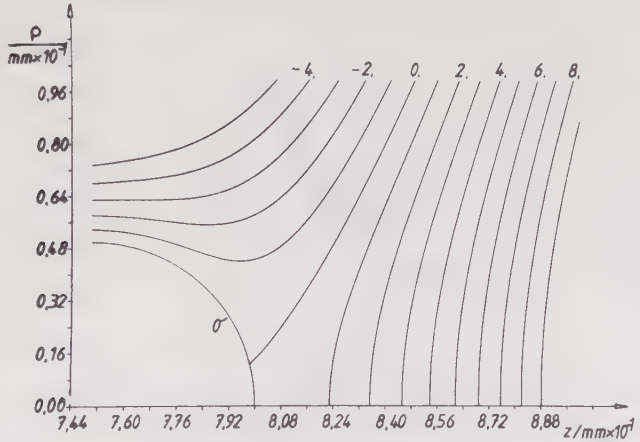



Abb. 18 b: Mit zunehmender Kathodentemperatur ($T_k$= 2800 K) wird die Nullvoltlinie zur optischen Achse verschoben ("Sättigungsbetrieb") ($U_W$= -126 V)

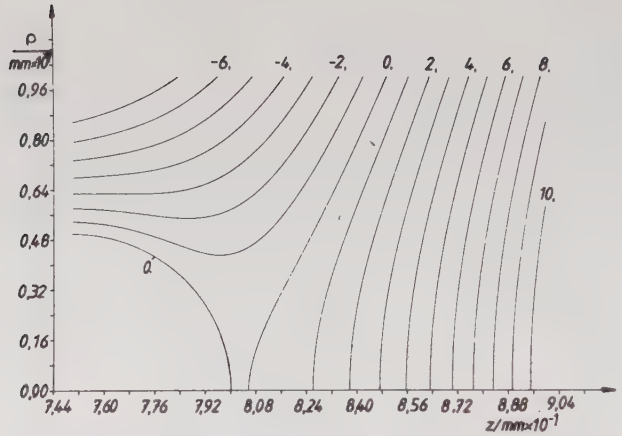



Abb. 18 c: Bei weiterer Erhöhung der Kathodentemperatur ($T_k$= 2900 K) bildet sich vor der gesamten Kathode ein Potentialminimum aus, das ohne Raumladung (a) nicht vorhanden ist ($U_W$= -126 V).

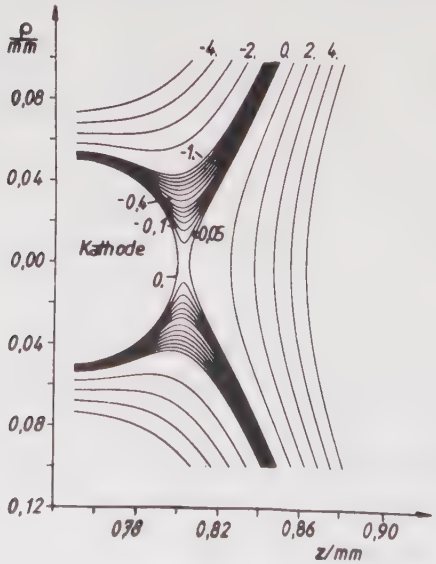



Abb. 18 d: Wie Abb.18c, aber mit zusätzlichen Äquipotentiallinien. Das durch die Raumladung bewirkte Potentialgebirge begrenzt den emittierenden Teil der Kathodenspitze wie eine Irisblende ($U_W$= -126 V) ("Raumladungsbetrieb").

## 4.2 Fehlerabschätzung

Wir wollen nachfolgend am Beispiel des Strahlerzeugers I den Einfluß der numerischen und physikalischen Näherungen sowohl bei der Potential- als auch bei der Raumladungsberechnung untersuchen. Dies soll uns die Möglichkeit zum Vergleich mit älteren Methoden zur Raumladungsberechnung geben.

### 4.2.1 Fehler bei der Potential- und Feldberechnung

Der Fehler bei dem in Abschnitt 2.1 beschriebenen Verfahren zur Lösung der Laplace-Gleichung wurde dadurch abgeschätzt, daß es auf eine raumladungsfreie Kugeldiode angewandt wurde, für die eine analytische Lösung bekannt ist. Die größte Abweichung zwischen numerischer und analytischer Lösung betrug in diesem Fall das $6.10^{-3}$-fache der angelegten Spannung, wobei die Dichte der Stütz- und Kontrollpunkte in den Elektroden dieselbe war, wie bei der Berechnung des Feldes im Strahlerzeuger I. Nur in unmittelbarer Nähe von Kanten und Ecken der Elektroden erhalten wir größere Abweichungen. Diese wirken sich aber nicht auf die elektronenoptischen Eigenschaften aus, die praktisch nur vom Feld im Paraxialbereich abhängen. Von der zur optischen Achse zentriert liegenden Kathode wird angenommen, daß sie eine glatte Oberfläche also keine Ecken und Kanten besitzt.

Die Genauigkeit der numerischen Lösung von Gl. (2.9) mit der Methode aus Abschnitt 2.2 ist durch die Genauigkeit der Berechnung der Koeffizientenfunktionen $c_1(r)$ nach Gl. (2.50), durch die der numerische Integration von Gl. (2.23) und der numerischen Lösung der Gln. (2.16) gegeben.

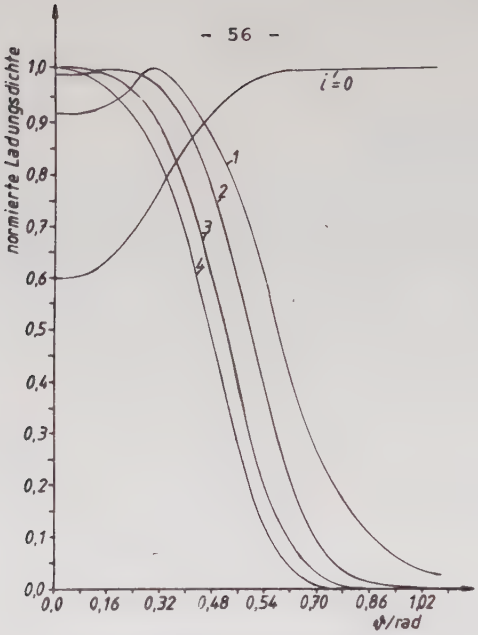



Abb. 19: Verlauf der Raumladung bei festem Radius r über den Winkel $\vartheta$ ($r = r_0(1 + \frac{i}{8})$, $i = 0 \ldots 4$)

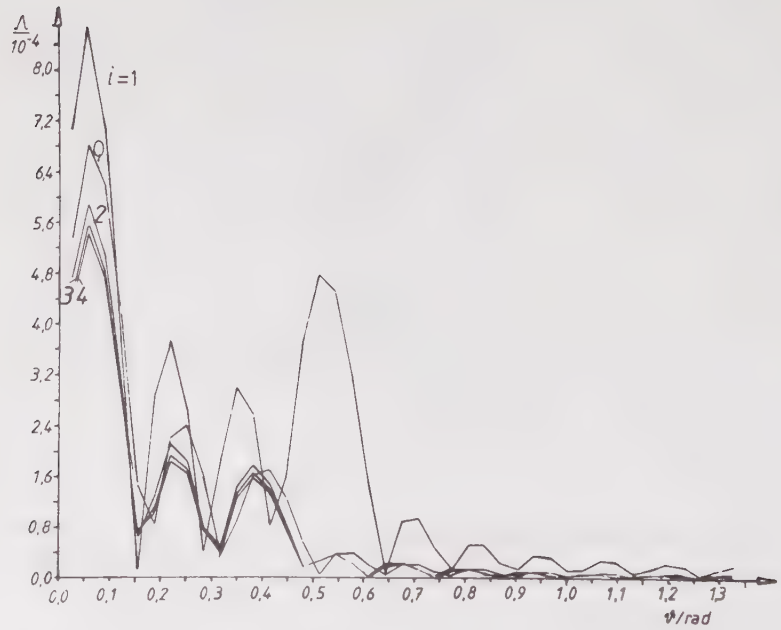



Abb. 20: Fehlermaß $\Lambda(r_i, \vartheta_i^*)$ für die Genauigkeit der Entwicklung der Raumladungsdichte in einer Reihe nach Legendrepolynomen ($i = 0, 1, \ldots, 4$)

Ein Fehlermaß für die Genauigkeit der Entwicklung der Raumladungsdichte $\sigma(r,\vartheta)$ nach Legendrepolynomen unter Verwendung der Gaußschen Quadraturformel (2.51) zur Berechnung der $c_1(r)$ ist die Funktion

$$(4.1)\quad \Lambda(r,\vartheta) = |\sigma(r,\vartheta) + \varepsilon_o \sum_{l=0}^{L} (2l+1) c_l(r) P_l(\cos\vartheta)| / \max|\sigma(r,\vartheta)| .$$

Im vorliegenden Fall ist L = 63. Abb. 19 zeigt die auf eins normierte Raumladungsdichte $\sigma$ in Abhängigkeit von $\vartheta$ für verschiedene feste Werte von r bei $T_K$ = 2900 K und $U_W$ = -126 V. Abb. 20 stellt das Fehlermaß $\Lambda$ in den Integrationsstützpunkten $(r_k, \vartheta_j^*)$ dar. Wie man sieht bleibt das Fehlermaß bereits mit L = 63 Koeffizienten deutlich unter 1‰ .

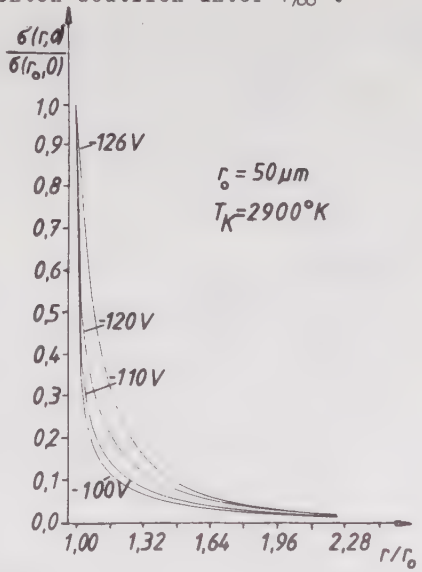



Abb. 21: Verlauf der normierten Raumladungsdichte auf der optischen Achse für verschiedene Werte von $U_W$.

Eine weitere mögliche Fehlerquelle bei der Potentialberechnung besteht darin, daß wir uns bei der Berücksichtigung der Raumladung auf einen endlichen Bereich $r_o \leq r \leq r_n$ vor der Kathode beschränken. Wie Abb.21 zeigt, ist die Raumladung hauptsächlich in einer dünnen Schicht an der Kathodenoberfläche konzentriert.

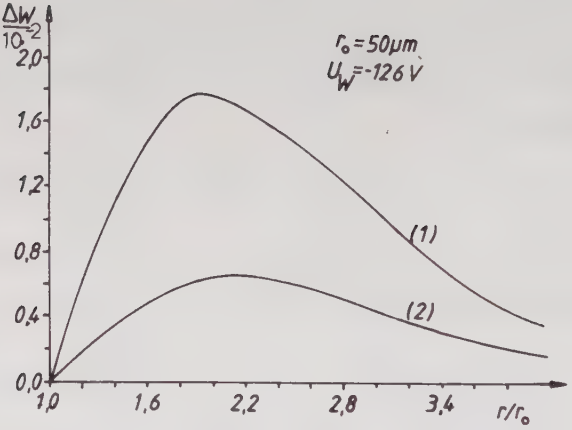



Abb. 22: Die Funktion $\Delta W$ gibt die relative Veränderung der Potentialfunktion $W(r,0)$ bei Variation der Raumladungsgrenze $r_n$ an. In Kurve (1) wurde $r_n = 2.5r_o$ und $3.0r_o$, in Kurve (2) $3.0r_o$ und $3.5r_o$ gewählt.

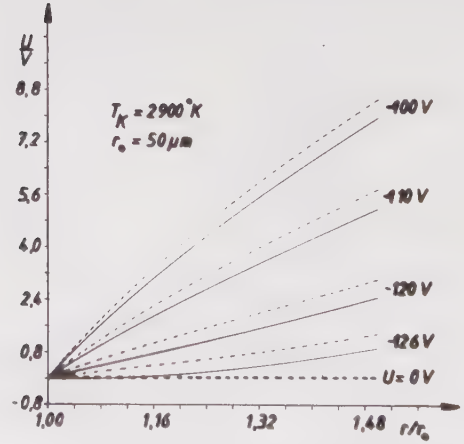



Abb. 23: Verlauf des Achsenpotentials $U(r,0)$ mit (———) und ohne (------) Berücksichtigung der Raumladungseinwirkung für verschiedene Wehneltspannungen $U_W$

Um zu prüfen, ob wir uns bei der Berücksichtigung der Raumladungsdichte tatsächlich auf einen endlichen Bereich $r_o \leq r \leq r_n$ vor der Kathode beschränken können, wurde $r_n$ stark variiert. Die zugehörige relative Änderung

$$\Delta W = \begin{cases} \left| \dfrac{W_1(r,0) - W_2(r,0)}{U(r,0)} \right|, & |U(r,0)| \geq 1 \text{ Volt} \\ |W_1(r,0) - W_2(r,0)|/1\text{Volt}, & U(r,0) < 1 \text{ Volt} \end{cases}$$

ist dabei gering (vgl. Abb. 22). Wir bezeichnen hierbei mit $W_1$ und $W_2$ die zu zwei verschiedenen Raumladungsgrenzen $r_n$ gehörigen raumladungsbedingten Potentialfunktionen $W(r,\vartheta)$. In Kurve (1) von Abb. 22 wurde $r_n = 2.5r_o$ und $3.0r_o$, in Kurve (2) $3.0r_o$ und $3.5r_o$ gewählt. Die Differenz der so erhaltenen Potentialfunktionen $W(r,0)$ wird zu dem in Abb. 23 dargestellten Achsenpotential $U(r,0)$ in Bezug gesetzt.

Eine weitere mögliche Fehlerquelle besteht darin, daß wir im Bereich des Kathodenschaftes den Einfluß der Raumladung völlig vernachlässigt haben. In diesem Bereich (vgl. Abb.4) herrscht ein starkes Gegenfeld an der Kathodenoberfläche, so daß alle emittierten Elektronen sehr dicht vor der Oberfläche wieder umkehren und nur eine sehr dünne Raumladungsschicht bilden. Im Grenzfall eines starken Gegenfeldes entartet die Raumladungswolke praktisch zu einer Oberflächenladung. Es wird physikalisch und numerisch sinnlos, diese von derjenigen Oberflächenladung zu unterscheiden, die eine nicht emittierende Oberfläche, die auf dem Potential Null gehalten wird, auch hätte. Qualitativ derselbe Effekt tritt auch im axialen Bereich der Kathodenspitze auf, wenn man mit dem Betrag der Wehneltspannung deutlich die Sperrspannung überschreitet. Abb.24 zeigt als Beispiel $W(r,0)$ für $U_W = -142$ V und $T_K = 2900$ K. Wie man sieht, wird das Potential vor der Kathode in diesem Fall nur unbedeutend erniedrigt.

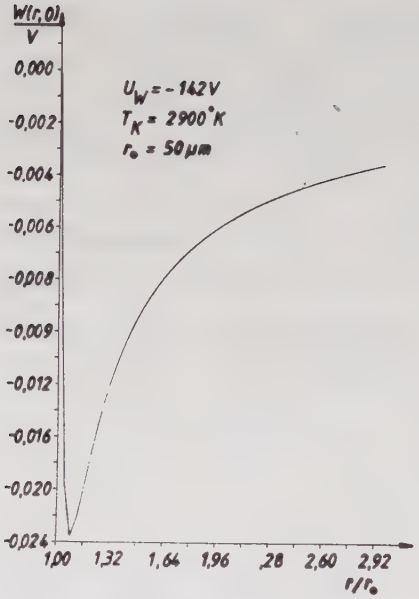



Abb. 24: Bei starkem Sperrbetrieb verschwindet der Einfluß der Raumladung auf das elektrostatische Potential fast vollständig.

Die durch die numerische Lösung der Dgln. (2.16) entstehenden Diskretisierungsfehler sind bei den auftretenden geringen Schrittweiten ($h \approx 0{,}02 r_0$) vernachlässigbar gering. Insgesamt wird also bei der Potentialberechnung eine für die praktische Anwendung völlig ausreichende Genauigkeit erzielt. Zur Prüfung der Genauigkeit des numerischen Verfahren zur Bestimmung des Potentials $W(r,\vartheta)$ aus einer gegebenen Ladungsdichteverteilung $\sigma(r,\vartheta)$ wurden einfache analytische $W(r,\vartheta)$ und $\sigma(r,\vartheta)$ konstruiert, welche exakt die Poisson-Gleichung (2.11) befriedigen und einen qualitativ ähnlichen Verlauf haben wie die im Strahlerzeuger I auftretenden Funktionen. In allen Fällen stimmten die aus gegebenem $\sigma(r,\vartheta)$ numerisch ermittelten Potentiale und Feldstärken im ganzen

Lösungsbereich jeweils in des ersten drei Dezimalen mit den aus der analytischen Lösung folgenden überein.

### 4.2.2 Fehler bei der Ladungsdichteberechnung

Die Berechnung der Raumladungsdichte nach Gl. (3.16) setzt Kugelsymmetrie des Feldes voraus. Tatsächlich hängt die Feldstärke vor der Kathodenoberfläche aber vom Winkel $\vartheta$ ab und hat nur unmittelbar vor deren kugelförmigem Teil radiale Richtung. Liegen aber die Stützpunkte $\vartheta_j^*$, auf die wir Gl.(3.16) anwenden, hinreichend nahe beieinander und wählen wir $r_k - r_o$ hinreichend klein, so glauben wir keinen großen Fehler zu machen, wenn wir in der nahen Umgebung von $\vartheta = \vartheta_j^*$ im Intervall $r_o \leq r \leq r_k$ näherungsweise Gl.(3.16) anwenden, wenn wir für $U(r)$ in (3.6) das vorgegebene $U(r, \vartheta_j^*)$ einsetzen. Eine quantitative Abschätzung des dabei gemachten Fehlers soll hier jedoch nicht versucht werden. Die für die planare Diode geltende Gleichung (3.17) ist unter der Voraussetzung hergeleitet worden, daß es eine geradlinige auf der Kathode und Anode senkrechte Achse gibt, in Bezug auf welche die Geschwindigkeitsverteilung symmetrisch ist und im Beschleunigungsfeld auch bleibt. Im Bereich $r_k \leq r \leq r_n$, in dem wir Gleichung (3.17) anwenden, ist für reale Strahlerzeuger die Bündelachse, d.h. die Stützbahn nicht geradlinig und die Geschwindigkeitsverteilung ist nur noch spiegelsymmetrisch in Bezug auf die Meridionalebene. Da uns der Übergang von Gl.(3.34) zu (3.35) eine Korrektur im richtigen Sinne zu sein scheint und (3.34) allgemein für eine laminare stationäre Strömung aus der Kontinuitätsgleichung folgt, auch wenn die Stromröhren keine geradlinige Achse und keinerlei Symmetrie besitzen, halten wir die Annahme, daß der Fehler bei

der Berechnung der Ladungsdichte $\sigma(r)$ nach der Trajektorienmethode, d.h. nach Gl.(3.35) kleiner ist als der Betrag der Differenz der Ladungsdichten $\sigma(r)$, die sich aus (3.34) und (3.35) ergeben, für plausibel.

## 4.3 Vergleich mit älteren Methoden zur Raumladungsberechnung

Nachfolgend wollen wir auf die bereits in Abschnitt 3.1 erwähnten Methoden teilweise näher eingehen, um die Vorteile des hier angegebenen Verfahrens aufzuzeigen.

### 4.3.1 Die Trajektorienmethode

Die von Kirstein und Hornsby (1964) angegebene und in ähnlicher Weise auch von Amboss (1969) angewandte Trajektorienmethode vernachlässigt die endliche Breite der Energieverteilung der aus der Kathode austretenden Elektronen und setzt voraus, daß bei raumladungsbegrenztem Emissionsstrom die Feldstärke an der Kathodenoberfläche verschwindet. Die ebene Kathode wird in emittierende Flächenelemente zerlegt. Jedem aus diesen Elementen emittierten Strom wird die aus dem Gesetz von Child-Langmuir folgende Emissionsstromdichte

$$(4.2) \qquad j_s = \frac{4}{9}\sqrt{\frac{2e}{m}}\frac{U^{3/2}}{d^2}$$

zugeordnet, wobei U das Potential der Anode und d ihren Abstand von der Kathode bedeutet. Die von der Kathode emittierte laminare Elektronenströmung wird in eine Anzahl von Stromfäden zerlegt, deren Verlauf jeweils durch eine, auf der Kathode senkrecht startende, Elektronenbahn gegeben ist. Die Lösung der Poissongleichung erfolgt nach dem Liebmannschen Maschenverfahren mit rechteckigen Maschen in der $\rho,z$-Ebene. In jeder dieser Maschen wird dann eine mittlere La-

dungsdichte berechnet. Dabei wird über alle durch die jeweilige Masche gehenden Stromröhren gemittelt. Der Strom in jeder dieser Stromröhren ist wegen (3.21) konstant. Man kann also aus dem lokalen Querschnitt der i-ten Röhre auf die lokale Stromdichte $j_i$ schließen. Dividiert man diese durch die lokale Elektronengeschwindigkeit $v \approx \sqrt{2eU/m}$, so erhält man die Ladungsdichte $\sigma_i$ in der i-ten Röhre. Dabei wird für U näherungsweise das Potential in der Mitte der jeweils betrachteten Masche eingesetzt. Die mittlere Ladungsdichte wird nun durch Mittelung über die $\sigma_i$ mit Gewichtsfaktoren bestimmt, die aus den relativen Volumenanteilen der durch die jeweilige Masche gehenden Röhren folgen. Die Umrechnung vom Strom in der i-ten Röhre auf die lokale Stromdichte $j_i$ ist äquivalent mit der Anwendung des von uns eingeführten Divergenzfaktors. Dieser wird aber bei uns wesentlich genauer bestimmt, als bei der herkömmlichen Trajektorienmethode. Verglichen mit dem dort angewandten Verfahren, das innerhalb einer Zelle des Maschennetzes die Ladungsdichte als konstant annimmt, scheint uns auch unsere Verwendung der Lagrange-Interpolation eine Beschreibung der Ladungsdichte mit wesentlich geringerem Diskretisierungsfehler zu erlauben.

### 4.3.2 Monte Carlo-Methoden

Wie bereits erwähnt, hat Hauke (1977) Raumladungseffekte in Triodensystemen untersucht. Im folgenden sollen die bei der von ihm angewandten Methode auftretenden Schwierigkeiten und ihre praktische Verwendbarkeit diskutiert werden.

Der Beitrag $dj_{ro}$ aller Elektronen mit einer Anfangsenergie zwischen $E_o$ und $E_o+dE_o$ und mit Startrichtungen zwischen $\gamma$

und $\gamma + d\gamma$ folgt aus (3.1) durch eine einfache Koordinatentransformation im Geschwindigkeitsraum:

(4.3) $dj_{ro} = (2 j_o/k^2T^2)\exp(-E_o/kT)E_o \cos\gamma \sin\gamma \, dE_o d\gamma$ .

Dabei ist $E_o=(m/2)v_o^2$ die Anfangsenergie und $\gamma$ der Winkel, den der Vektor $\vec{v}_o$ der Anfangsgeschwindigkeit mit der Oberflächennormale bildet. Vom Azimutwinkel $\varphi$ in der Tangentialebene an die Kathodenoberfläche hängt die Stromdichteverteilung nicht ab. Hauke benutzte in seiner Arbeit diese Verteilung und unterteilte den Wertebereich der Anfangswerte $E_o$, $\varphi_o$ und $\gamma$ in endliche Intervalle $\Delta E_o$, $\Delta\varphi_o$ und $\Delta\gamma$. Ebenso wurde die Kathodenoberfläche in eine endliche Anzahl von Flächenelementen zerlegt. Dann wurden durch einen Zufallszahlengenerator Startwerte zur Lösung der Lorentzschen Bewegungsgleichung (3.26) ausgelost. Diese wurde dann mit in der Zeit t äquidistanter Schrittweite gelöst. Zur Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeitsverteilung (4.3) wurde jede Bahn mit einem für ihre relative Wahrscheinlichkeit charakteristischen Zahlenwert gewichtet. Die Bahnpunkte am Ende eines jeden Integrationsschrittes der Bewegungsgleichung, deren Koordinaten $\rho$ und z eine bestimmte Masche eines Maschennetzes fallen, werden in dieser mit ihrem zugehörigen Gewicht aufsummiert. Die resultierende Summe in jeder dieser Maschen wurde als Maß für die örtliche Raumladungsdichte verwendet. Ein weiterer Nachteil der Monte-Carlo-Methode besteht darin, daß wie bei der herkömmlichen Trajektorienmethode die Ladungsdichte in jeder Zelle des Maschennetzes als konstant angenommen wird. Der dadurch hervorgerufene Diskretisierungsfehler wurde bereits in 4.3.2 diskutiert. Für Strahlerzeuger mit ebener Kathode verwendet Hauke quadratische Maschen; für stark gekrümmte Kathodenoberflächen führt er krummlinige Koordinaten ein, so daß die Kathodenoberfläche Koordinatenoberfläche wird.

Wollte man das Verfahren von Hauke auf die in der vorliegenden Arbeit behandelten Strahlerzeuger anwenden, bei denen vorausgesetzt ist, daß der emittierende Bereich der Kathodenoberfläche Teil einer Kugelfläche ist, so würde man natürlich auch Kugelkoordinaten verwenden. Die Maschenweite dürfte dabei in radialer Richtung nicht viel größer als $0{,}02r_0$ sein, um den steilen Abfall der Raumladungsdichte unmittelbar vor der Kathode (vergl. Abb. 21) erfassen zu können. Um bei so kleiner Maschenweite die statistischen Schwankungen der Zahl der in einer Masche registrierten Endpunkte von Bahnintervallen hinreichend klein zu halten, würde man in jedem Iterationszyklus wesentlich mehr als 1000 Bahnen berechnen müssen. Wegen der dafür benötigten Rechenzeit scheint uns das Monte Carlo-Verfahren von Hauke unwirtschaftlich und damit nicht sinnvoll zu sein.

4.3.3 Teilweise analytische Näherungsverfahren

Hasker (1966, 1969 I, 1969 II) hat erstmals für rotationssymmetrische Mehrelektrodensysteme mit ebenen Kathode numerische Rechnungen durchgeführt, welche die Energie- und Winkelverteilung der Elektronen berücksichtigten. Hierbei wurde längs einer zur Kathodenoberfläche senkrechten Geraden mit Hilfe der Langmuirschen Theorie für die planare Diode die Raumladungsdichte bestimmt. Das Potential wurde hierbei durch eine analytische Funktion approximiert. Hasker untersuchte den Einfluß des vor der Kathode entstehenden Potentials auf die Energieverteilung der aus dem Strahlerzeuger austretenden Elektronen und stellte dabei eine zehnprozentige Verbreiterung gegenüber der ursprünglichen Halbwertsbreite fest. Hauke benutzte bei einem Vergleich mit der von ihm bervorzugten Monte Carlo-Methode praktisch dasselbe Verfah-

ren zur Raumladungsberechnung, berechnete jedoch das Potential wesentlich genauer durch ein iteratives Verfahren mit finiten Differenzen. Dabei stellte er eine ähnliche Energieverbreiterung wie Hasker fest.

Für Systeme mit Spitzenkathoden sind bisher keine analytischen Näherungsverfahren bekannt.

## 5. Elektronenoptische Meßgrößen unter dem Einfluß des durch die Raumladung veränderten Potentials

### 5.1 Vergleich von rechnerisch ermittelten Größen mit Meßergebnissen

Eine Beschreibung der Struktur des Bündelquerschnittes, d.h. eine Aussage darüber, mit welcher Steigung y' und in welchem Achsenabstand Meridionalbahnen y(z) eine Referenzebene z = const durchstoßen, erhalten wir mit Hilfe von Emittanzdiagrammen ( Hanssen, 1964). Bei diesen wird y über y'aufgetragen. Jede berechnete Bahn liefert einen Punkt im Emittanzdiagramm.

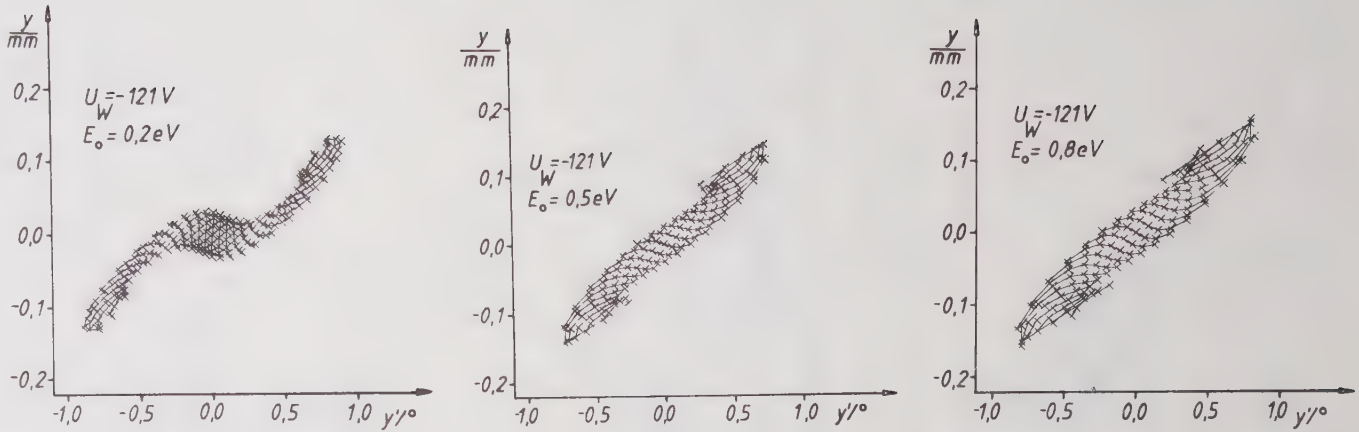
Für das Triodensystem I wurden Emittanzdiagramme berechnet und mit von Lauer (1982) veröffentlichten Messungen verglichen.
Im feldfreien Raum hinter der Anode verlaufen die Elektronenbahnen linear, d.h. sie können durch die Bahnasymptoten

$$(5.1) \qquad y(z_1) = y(z)-(z-z_1)\cdot y'(z)$$

beschrieben werden.

Um bei einem Vergleich von Emittanzdiagrammen den Einfluß der willkürlichen Wahl der Referenzebene zu vermeiden, mißt Lauer nur im feldfreien Raum, stellt dann aber die Emittanzdiagramme für die Ebene $z_1$=10.3 mm dar, d.h. in der Ebene der Vorderkante der Anode (vergl. Abb.14).
Ein solcher Übergang zu einer anderen Referenzebene $z_1$ mittels (5.1) ist auch dann sinnvoll, wenn $z_1$ nicht im feldfreien Raum liegt und die tatsächlichen Bahnen dort von ihren Asymptoten abweichen. Das Emittanzdiagramm beschreibt in jedem Fall das Bündel der Asymptoten. Beispielsweise ist es

immer möglich, die Ebene des engsten Querschnitts des Asymptotenbündels als Querschnitt zu wählen. Dann wird die Wendetangente in der Mitte des Emittanzdiagrammes horizontal.
Wir wollen nun jeweils aus ca. 120 Meridionalbahnen Emittanzdiagramme berechnen. Die Emittanzdiagramme wurden aus Bahnen mit Startenergien von 0,2 eV, 0,5 eV und 0,8 eV berechnet. Die Startorte und Startwinkel $\gamma$ der Elektronenbahnen wurden wie in Abschnitt 4.2.2 gewählt. In Abb. 27 a, b und c sehen wir die in der Ebene z = 20 mm berechneten und durch die Beziehung (5.1) in die Ebene z =10.3 mm transformierten Diagramme ohne Berücksichtigung der Raumladung. Die Wehneltspannung betrug -121 V.




a.) b.) c.)

Abb. 27: Unter Beschränkung auf Meridionalbahnen berechnete Emittanzdiagramme im Strahlerzeuger I ohne Berücksichtigung der Raumladung in der Ebene $z_1$ = 10,3 mm für verschiedene Startenergien $E_o$ der Elektronen. Die zu einem Startort auf der Kathode gehörigen Punkte im Diagramm sind durch einen Linienzug verbunden.

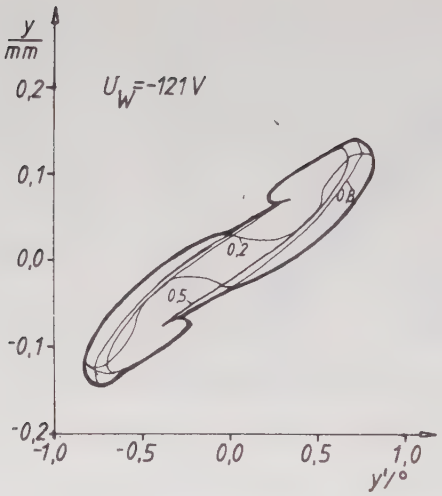



Abb. 28: Berechnetes Emittanzdiagramm im Strahlerzeuger I durch Überlagerung der Randkurven der Figuren aus Abb. 27. Es sind die zu verschiedenen Energien $E_o$ gehörigen Randkurven eingezeichnet (Energieangaben in eV)

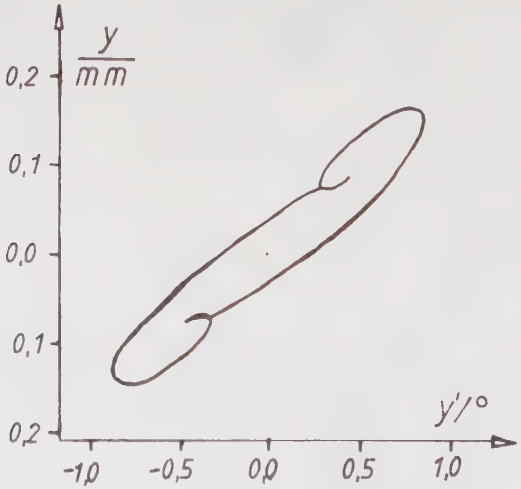



Abb. 29: Ein bei schwachem Raumladungseinfluß für $U_W$=-121 V aus Messungen ermitteltes Emittanzdiagramm (nach R. Lauer, 1982)

Da sich das Elektronenbündel aus Elektronen verschiedener Anfangsenergien zusammensetzt, wurden für einen Vergleich mit dem Experiment die Randkurven der Figuren aus Abb. 27 zusammen in Abb. 28 dargestellt. Abb.29 zeigt ein von R. Lauer aus Messungen am selben Strahlerzeuger I gewonnenes Emittanzdiagramm (Abb. 29). In Abb. 30 a,b und c sehen wir die unter dem Einfluß der Raumladung berechneten Diagramme für die Startenergien von 0,2 eV, 0,5 eV und 0,8 eV der Elektronen und in Abb. 31 ihre Überlagerung. Auch diese Figur wurde zum besseren Vergleich mit dem aus Messungen gewonnen Diagramm (Abb.32) umzeichnet.

Der Vergleich zwischen berechneten und aus Messungen gewonnenen Emittanzdiagrammen soll in den Extrema der Diagramme ($y_{min}, y_{max}, y'_{min}, y'_{max}$) erfolgen. Tabelle 1 läßt eine qualitative Übereinstimmung zwischen berechneten und Meßergebnissen erkennen. Noch besser ist die Übereinstimmung der in Tabelle 2 unter Berücksichtigung der Raumladung verglichenen Werte.

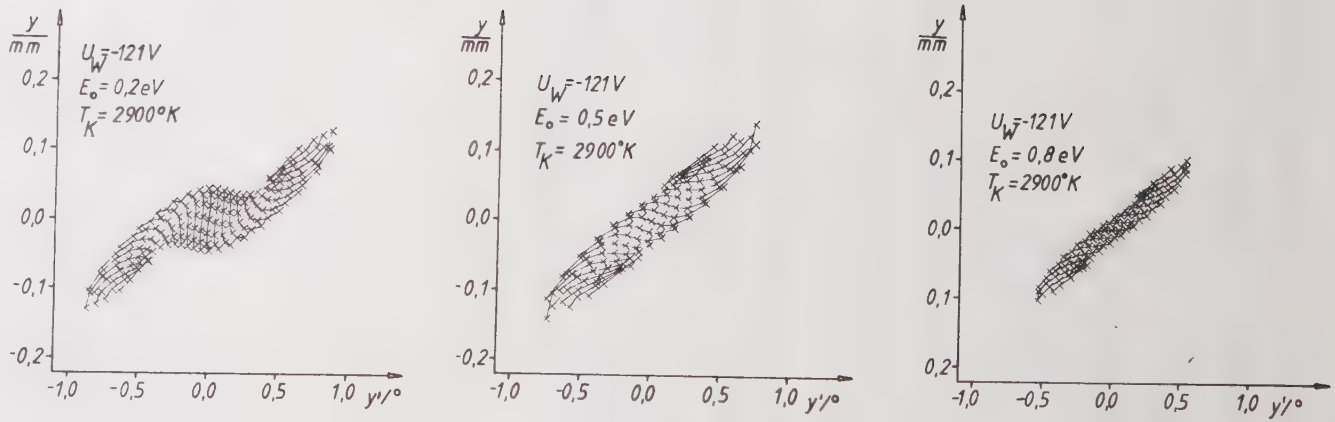



Abb. 30: Aus Meridionalbahnen berechnete Emittanzdiagramme mit Berücksichtigung der Raumladung in der Ebene $z_1$ = 10.3 mm für verschiedene Startenergien $E_o$ der Elektronen. Die zu einem Startort auf der Kathode gehörigen Punkte im Diagramm sind durch einen Linienzug verbunden

Tabelle 1: Abmessungen der Emittanzdiagramme $U_W$ = -121 V (ohne Berücksichtigung der Raumladung)

| | Abb. 27a | Abb. 27b | Abb. 27c | Abb. 29 |
|---|---|---|---|---|
| $y_{min}$/mm | - 0.13 | - 0.15 | - 0.16 | - 0.17 |
| $y_{max}$/mm | 0.13 | 0.15 | 0.16 | 0.18 |
| $y'_{min}$/° | - 0.9 | - 0.7 | - 0.6 | - 0.9 |
| $y'_{max}$/° | 0.9 | 0.7 | 0.6 | 0.97 |

Tabelle 2: Abmessungen der Emittanzdiagramme $U_W$ = -121 V, $T_K$=2900° K (mit Berücksichtigung der Raumladung)

| | Abb. 30a | Abb. 30b | Abb. 30c | Abb. 32 |
|---|---|---|---|---|
| $y_{min}$/mm | - 0.13 | - 0.14 | - 0.11 | - 0.13 |
| $y_{max}$/mm | 0.13 | 0.14 | 0.11 | 0.12 |
| $y'_{min}$/° | - 0.80 | - 0.70 | - 0.55 | - 0.72 |
| $y'_{max}$/° | 0.80 | 0.70 | 0.55 | 0.68 |

Die äußere Gestalt der aus den Meßdaten ermittelten Emittanzdiagramme und die der rechnerisch bestimmten Diagramme stimmen ebenfalls sehr gut überein.

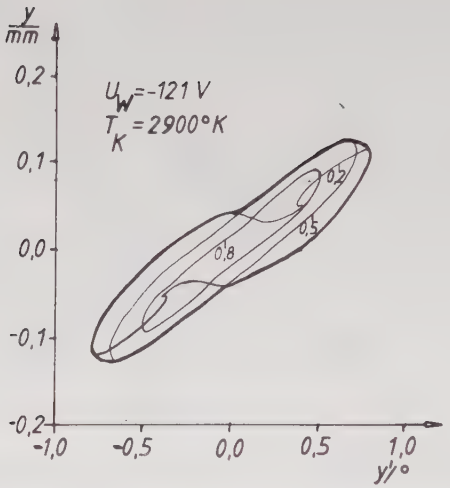



Abb. 31: Berechnetes Emittanzdiagramm im Strahlerzeuger I durch Überlagerung der Randkurven der Figuren aus Abb. 30 a,b und c. Die zu verschiedenen Energien $E_o$ gehörigen Randkurven sind eingezeichnet (Energieangaben in eV)

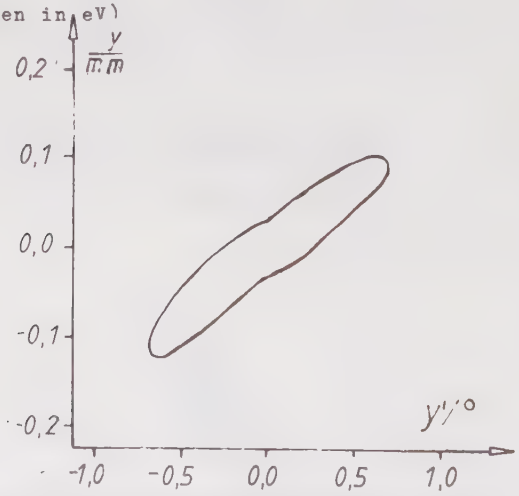



Abb. 32: Ein bei starkem Raumladungseinfluß ($T_K$ = 2900° K) aus Messungen ermitteltes Emittanzdiagramm (nach R. Lauer, 1982)

Rechnung und Experiment zeigen dieselbe qualitative Veränderung der Emittanzdiagramme durch den Raumladungseinfluß: Einmal werden die Aussenabmessungen der Diagramme mit zunehmender Raumladung kleiner. Außerdem verschwinden die in Abb. 27, 28 und 29 erkennbaren "Endzipfel" mit zunehmender Raumladung. Dieselben qualitativen Veränderungen ergeben sich auch bei einer Wehneltspannung von -97 V (Abb. 33 a und b). Die ausgeprägten Endzipfel des Diagrammes in Abb.33 a entstehen durch die Überlagerung von Randkurven, die zu verschiedenen Startenergien der Elektronen gehören. Die von Lauer aus Messungen gewonnenen Diagramme (Abb. 33 c und d) zeigen erhebliche Unsymmetrien. Das durch die Raumladung bewirkte Verschwinden der Endzipfel wird jedoch richtig beschrieben. Mögliche Gründe für die Unsymmetrien sind die Ortsabhängigkeit der Austrittsarbeit und Richardsonkonstante auf der Kathodenoberfläche, sowie nichtrotationssymmetrische Bauelemente, die Dezentrierung und Abweichungen der Kathodenspitze von der Kugelsymmetrie.

## 5.2 Strahlerzeuger II

Wir wollen nun das in Abb.34a dargestellte Triodensystem mit Kugelkathode untersuchen, an dem Lauer 1976 Emittanzdiagramme aufgenommen hat. Bei diesem System stimmte die von uns berechnete mit der von Lauer gemessenen Sperrspannung $U_W$=-132 V überein. Abb.34 a zeigt die Äquipotentiallinien, Abb.34 b dasselbe in vergrößertem Maßstab in der Umgebung der Kathode. Der Kathodenkrümmungsradius beträgt 200 µm. Die Anodenspannung wurde zu $U_A$= 10000 V und die Wehneltspannung zu $U_W$= -110 V gewählt. Die Kathodentemperatur wurde für alle weiteren Rechnungen zu $T_K$= 2600 K angenommen. Die Aus-

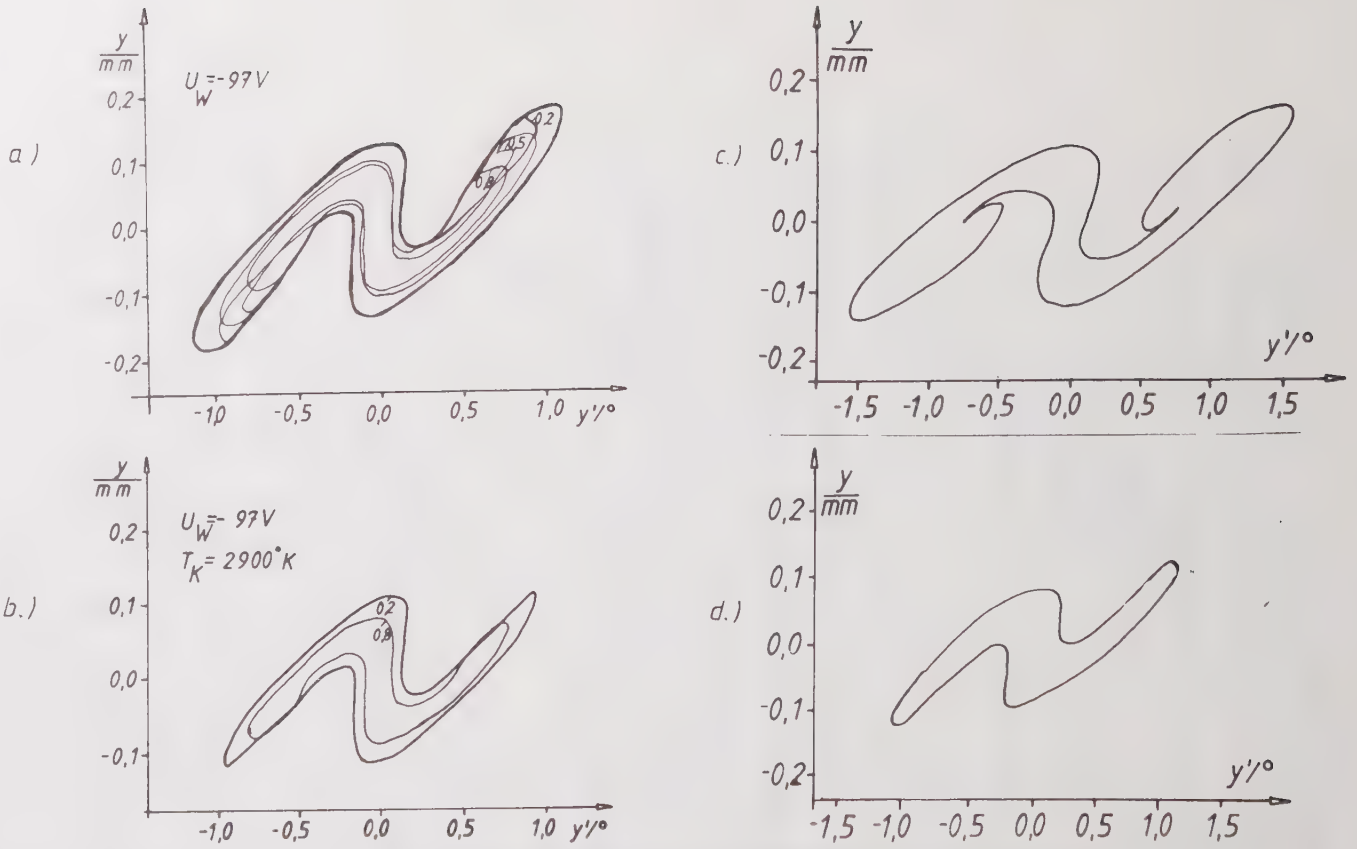



Abb. 33: Berechnete Randkurven von Emittanzdiagrammen für verschiedene Startenergien $E_o$ der Elektronen (a und b), bezogen auf die Ebene $z_1$ = 10,3 mm verglichen mit von R. Lauer (1982) aus Messungen gewonnenen (c und d). Die Kurven a und c beziehen sich auf den Fall vernachlässigbarer Raumladung, b und d auf $T_K$ = 2900 K.

trittsarbeit wurde mit $\Phi_A$= 4.03 eV etwas niedriger angenommen als bei dem System mit Spitzenkathode. Mit diesen Werten von $T_K$ und $\Phi_A$ ergab sich eine gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Experiment und bei hinreichend großem Betrag der Wehneltspannung auch im paraxialen Bereich deutliche Potentialminima vor der Kathode. Bei Lauer werden die über die bei seinen Messungen geltenden Werte von $T_k$ und $\Phi_A$ keine Angaben gemacht.

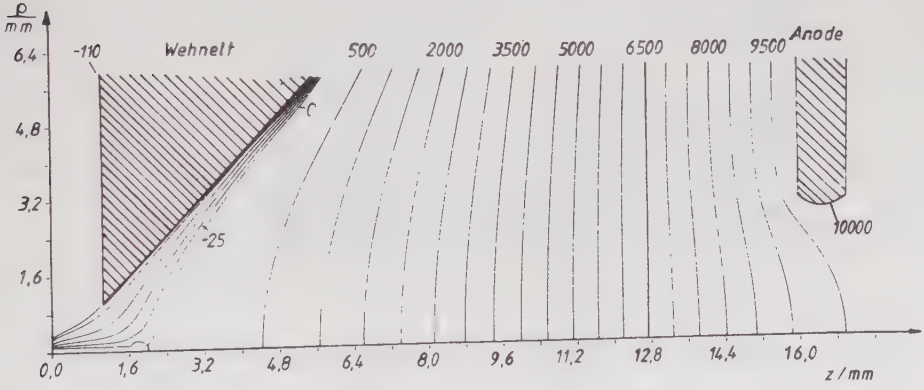



Abb. 34 a: Strahlerzeuger II mit Äquipotentiallinien. (Potentialangaben in Volt)

Diese niedrige Austrittsarbeit führt zu einer relativ hohen Emissionstromdichte $j_o$ in Gl.(3.2). Für die Richardsonkonstante wurde wie beim Strahlerzeuger I ein Wert von 100 $A/cm^2K$ verwendet. Wegen der hohen Stromdichte $j_o$ und dem relativ großen Krümmungsradius der Kathodenoberfläche sind die Raumladungseffekte relativ stark. Bei der Potential- und Feldberechnung nach Abschnitt 2 und 3 betrug die CPU-Zeit für eine Fehlerschranke von $\delta = 7 \cdot 10^{-4}$ auf dem Tübinger

Rechner UNIVAC 1100/80 maximal 2 1/2 Stunden. Die Konvergenz hing stark vom Unterrelaxationsfaktor $\omega$ ab und war für $\omega$-Werte zwischen 0.28 und 0.40 am schnellsten. Bis zur Unterschreitung der Fehlerschranke $\delta$ wurden meistens mehr als 20 Iterationszyklen benötigt.

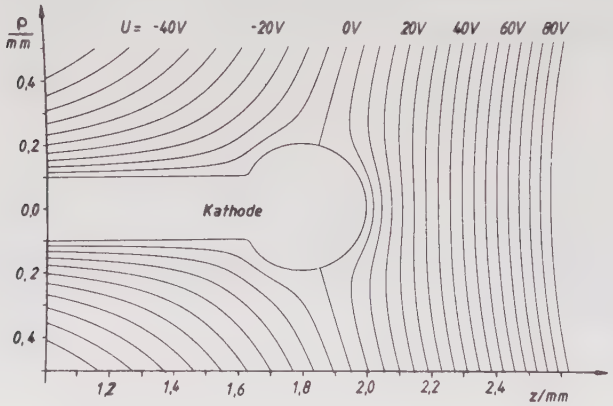



Abb. 34 b: Äquipotentiallinien in der Umgebung der Kathode. Die Kathodenoberfläche ist hierbei Teil der Nullvoltlinie. (Potentialangaben in Volt)

Abb. 35 zeigt Äquipotentiallinien für Wehneltspannungen zwischen $U_W$= -90 V und $U_W$= -110 V. Durch die Raumladung entsteht für $U_W \leq$-100 V ein Potentialminimum vor der ganzen Kathode. Der Bereich der Kathodenoberfläche, von dem Elektronen zur Anode gelangen können, wird durch den Einfluß der Raumladung eingeschränkt. Im Bereich behinderter Emission wird ein Teil der Elektronen ausgefiltert, insbesondere die mit großem $\gamma$ und kleiner Startenergie $E_o$. In Abb.36 ist der Kegelwinkel $\vartheta_e$, der den emittierenden Bereich der Kathodenspitze kennzeichnet über der Wehneltspannung aufgetragen. Der emittierende Bereich wurde hier so definiert, daß aus

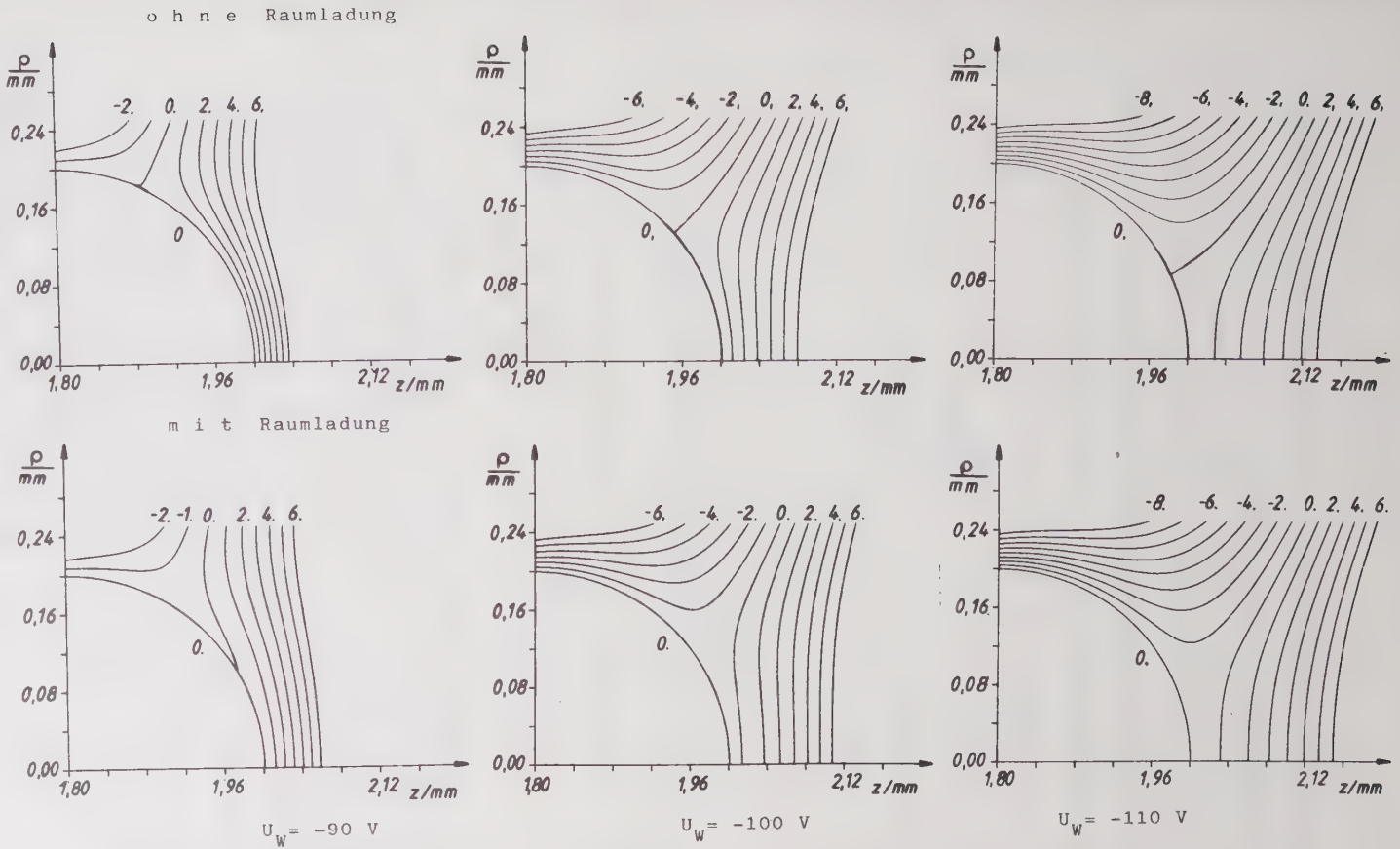



Abb. 35: Äquipotentiallinien unmittelbar vor der Kathodenkugel für verschiedene Wehneltspannungen $U_W$, mit und ohne Berücksichtigung der Raumladung (alle Potentialangaben in Volt)

ihm auf der Kathode mit der Energie $E_0 = 3kT$ senkrecht startende Trajektorien bis zur Ebene $z = 25$ mm gelangen. Wie bereits die Abb.35 zeigt, wird $\vartheta_e$ durch den Einfluß der Raumladung verkleinert. Zum Vergleich sind auch die von R. Lauer gemessenen Kegelwinkel $\vartheta_e$ aufgetragen. Mit Annäherung an die Sperrspannung nimmt der Raumladungseinfluß ab.

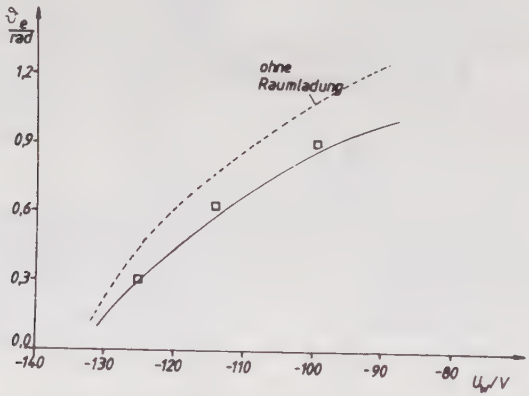
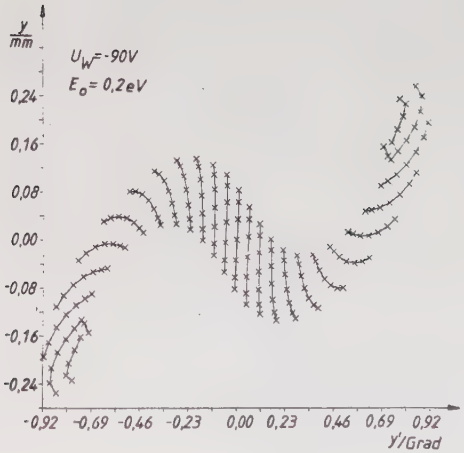


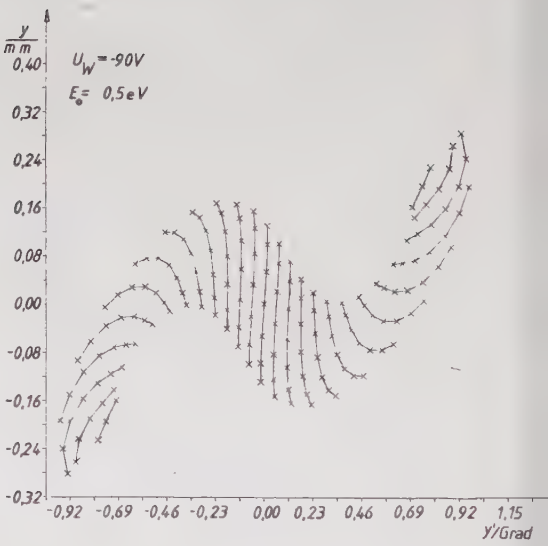

Abb. 36: Kegelwinkel der emittierenden Kathodenoberfläche in Abhängigkeit von der Wehneltspannung. Meßergebnisse (Lauer 1976) sind durch □ gekennzeichnet.

Auch bei Strahlerzeuger II haben wir für verschiedene Wehneltspannungen $U_W$ und verschiedene Startenergien $E_0$ Elektronenbahnen berechnet. Die Anodenspannung $U_A$ wurde immer fest gewählt (10000 V). Bei den von einem Startort ausgehendnen meridionalen Elektronenbahnen wurde der Startwinkel $\gamma$ zwischen -67,5° und 67,5° in 22,5°-Schritten variiert. Abb.37 zeigt unter Vernachlässigung der Raumladung berechnete Emittanzdiagramme für gleiche Wehneltspannung $U_W$=-90 V, aber verschiedene Startenergien $E_0$. Hier ist der Einfluß der endlichen Energieverteilung auf die maximale Ausdehnung des Emittanzdiagrammes relativ gering. In Abb.38 sehen wir das

bei derselben Wehneltspannung unter Raumladungseinfluß berechnete Emittanzdiagramm. Durch den Raumladungseinfluß werden die Endzipfel der Emittanzdiagramme aus Abb.37 abgeschnitten.

Abb.39 a und b zeigen berechnete Emittanzdiagramme mit und ohne Berücksichtigung der Raumladung bei einer Wehneltspannung von $U_W$= -100 V und bei einer festen Anfangsenergie $E_o$= 0.5 eV. Auch hier beeinflußt die Raumladung hauptsächlich die Endzipfel des Diagramms. Abb.40 stellt ein ohne Raumladungseinfluß bei $U_W$= -110 V berechnetes Emittanzdiagramm dar. Die Anfangsenergie $E_o$ der Elektronen betrug hier 0,5 eV. In Abb.41 a-c sehen wir deutlich die Filterwirkung des durch die Raumladung bedingten Potentials vor der Kathode in Abhängigkeit von der Anfangsenergie $E_o$. Die maximale Ausdehnung der Emittanzdiagramme hängt in diesem Fall stark von $E_o$ ab.



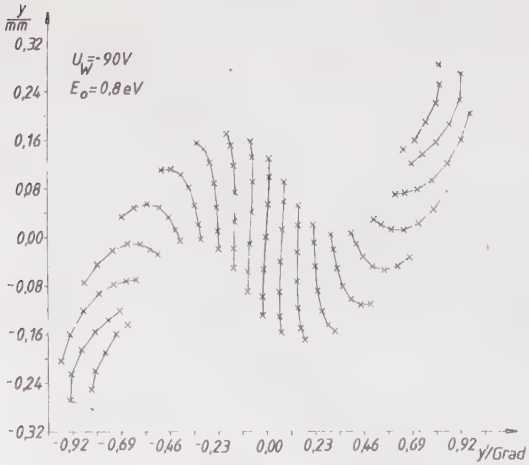




Abb. 37: Berechnete Emittanzdiagramme bei einer Wehneltspannung von -90 V für verschiedene Startenergien $E_o$ der von der Kathode emittierten Elektronen. Die Raumladung wurde hierbei nicht berücksichtigt.

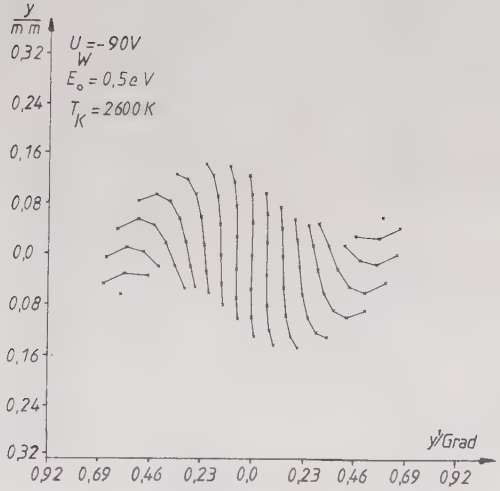



Abb. 38: Ein unter Berücksichtigung der Raumladung bei $U_W$ = -90 V berechnetes Emittanzdiagramm.

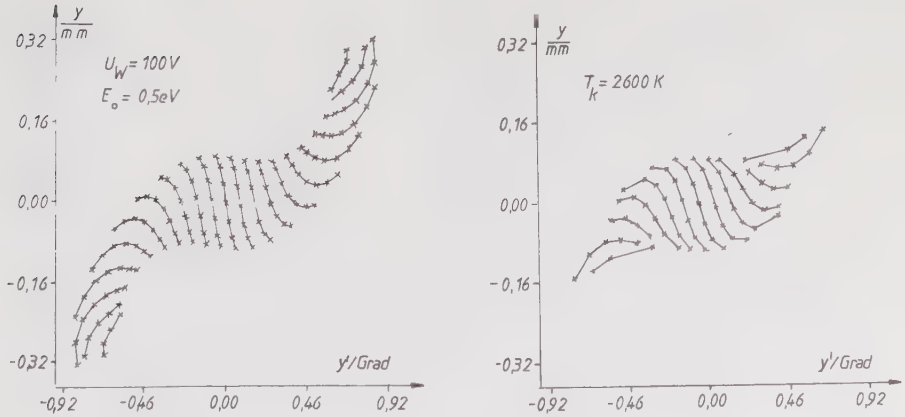



Abb. 38a, b: Berechnete Emittanzdiagramme mit (b) und ohne (a) Raumladungseinwirkung bei einer Wehneltspannung von $U_W$ = -100 V.

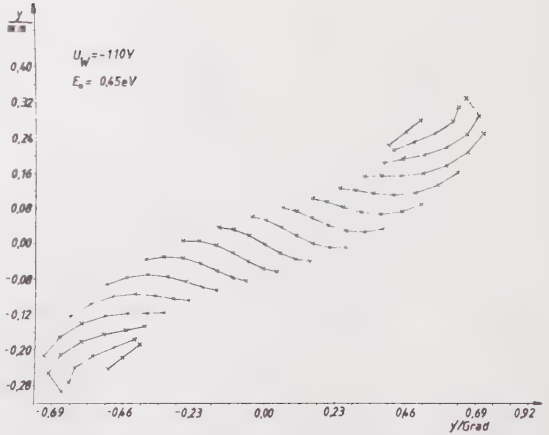



Abb. 40: Berechnetes Emittanzdiagramm ohne Berücksichtigung der Raumladung ($U_W$= -110 V)

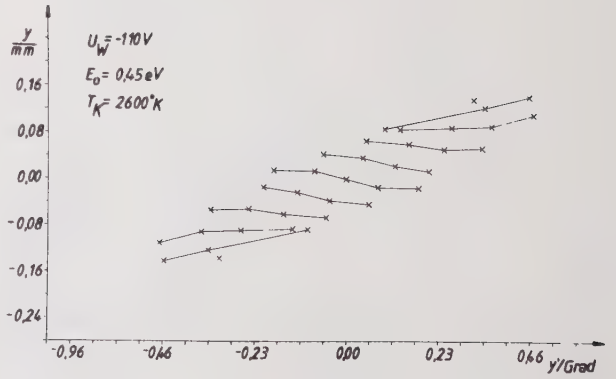



Abb. 41 a

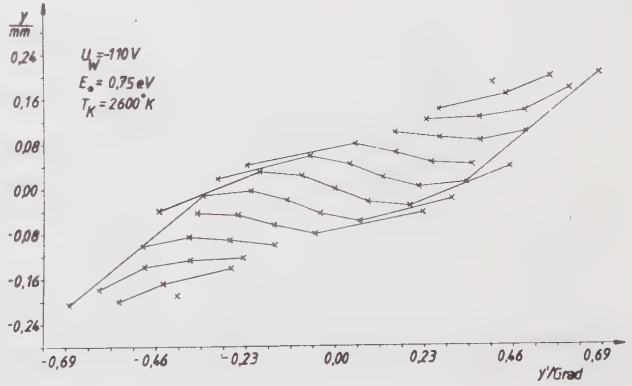



Abb. 41 b

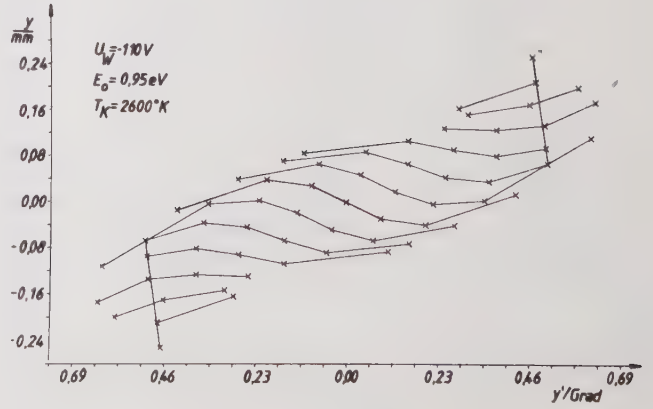



Abb. 41 c

Abb. 41 a-c: Berechnete Emittanzdiagramme für verschiedene Startenergien $E_o$ der Elektronen bei Berücksichtigung der Raumladung ($U_W$ = -110 V)

Die berechneten Meridionalbahnen können außer zur Gewinnung von Emittanzdiagrammen auch zur Abschätzung der Stromdichteverteilung in einer achsensenkrechten Ebene im feldfreien Raum verwandt werden. Wir haben dies für die Ebene z = 25 mm getan. Zu diesem Zweck wird registriert, wo jede Bahnasymptote diese Ebene trifft, die wir in radialer Richtung in äquidistante Intervalle

$$[\rho_k, \rho_{k+1}] = [\rho_k, \rho_k + \Delta\rho]$$

vom Flächeninhalt $\pi(\rho_k + \rho_{k+1})\Delta\rho$ einteilen. Da wir die Kathodenoberfläche in Flächenelemente $2 \sin\vartheta_i \Delta\vartheta$ unterteilt haben, geht jede unter dem Startwinkel $\gamma$ mit der Anfangsenergie $E_o$ emittierte Elektronenbahn nach (4.3) mit dem Gewichtsfaktor

$$g = \cos\gamma \, (2 \cdot \sin\vartheta_i / (\rho_k + \rho_{k+1})) \; E_o \exp(-E_o/kT)$$

in die Stromdichte ein. Die Summe der Zahl aller mit diesen Faktoren gewichteten Bahndurchstoßpunkten in jedem Intervall $\Delta\rho$ ist ein Maß für die auf dem entsprechenden Ringelement k in der Ebene z = 25 mm vorliegende Stromdichte. Zur Berechnung der in Abb.42 a,b dargestellten Verteilungen wurden ca. 1000 Bahnen berechnet. Mit zunehmendem Betrag der Wehneltspannung wird in Abb.42 a, d.h. im Fall vernachlässigter Raumladung ein außeraxiales ringförmiges Stromdichtemaximum ("Hohlstrahl") immer deutlicher. In Abb.42 b, d.h. bei Berücksichtigung der Raumladung ist der Hohlstrahl, wenn überhaupt, dann sehr viel weniger deutlich ausgeprägt. Ein besserer Ausgleich statistischer Schwankungen in den Stromdichteverteilungen, der die Verwendung kleinerer Ringbreiten $\Delta\rho$ erlauben würde, würde die Berechnung einer wesentlich größeren Anzahl von Elektronenbahnen erfordern. Eine realistische Beschreibung der Intensitätsverteilung im Elektronenstrahl müßte außer Meridionalbahnen auch "windschiefe" Bahnen be-

rücksichtigen, d.h. solche mit endlichem Drehimpuls um die elektronenoptische Achse. Auf beide wurde verzichtet, um den Aufwand an Rechenzeit in vernünftigen Grenzen zu halten.

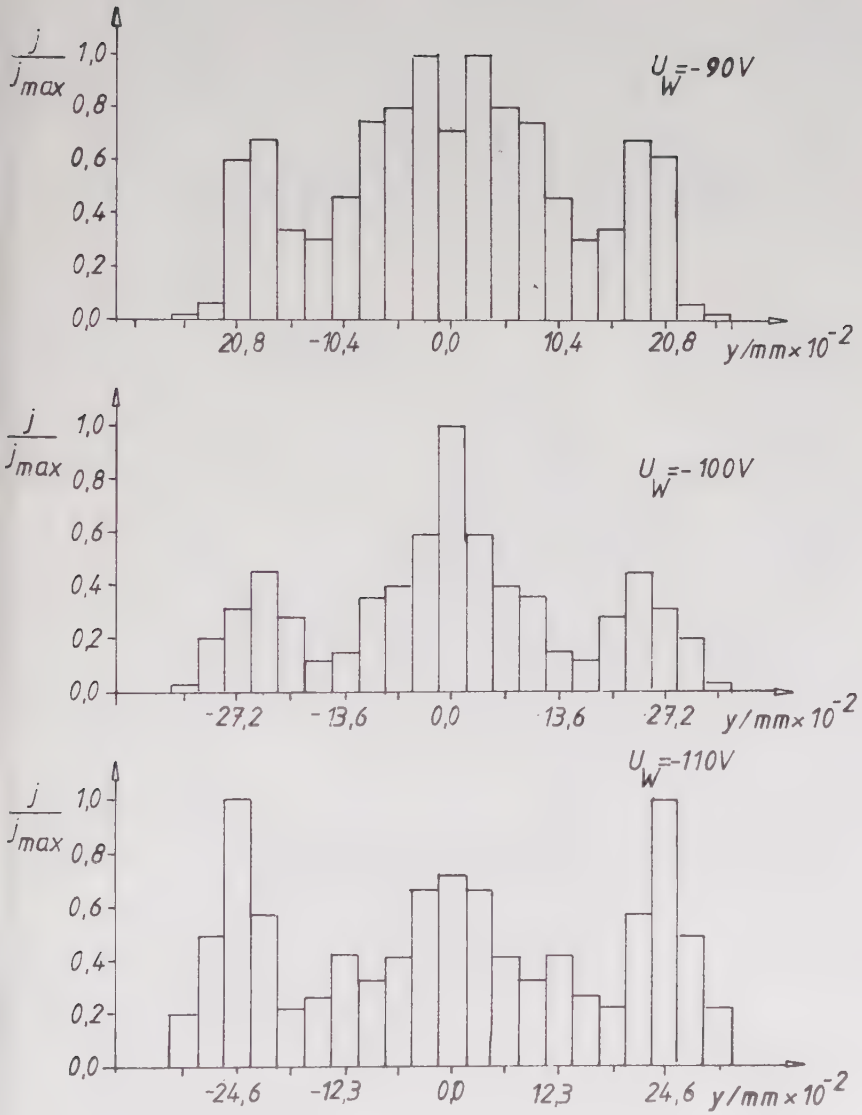



Abb. 42 a: In der Ebene z = 25 mm berechnete Stromdichteverteilungen für verschiedene Wehneltspannungen $U_W$ ohne Berücksichtigung der Raumladung

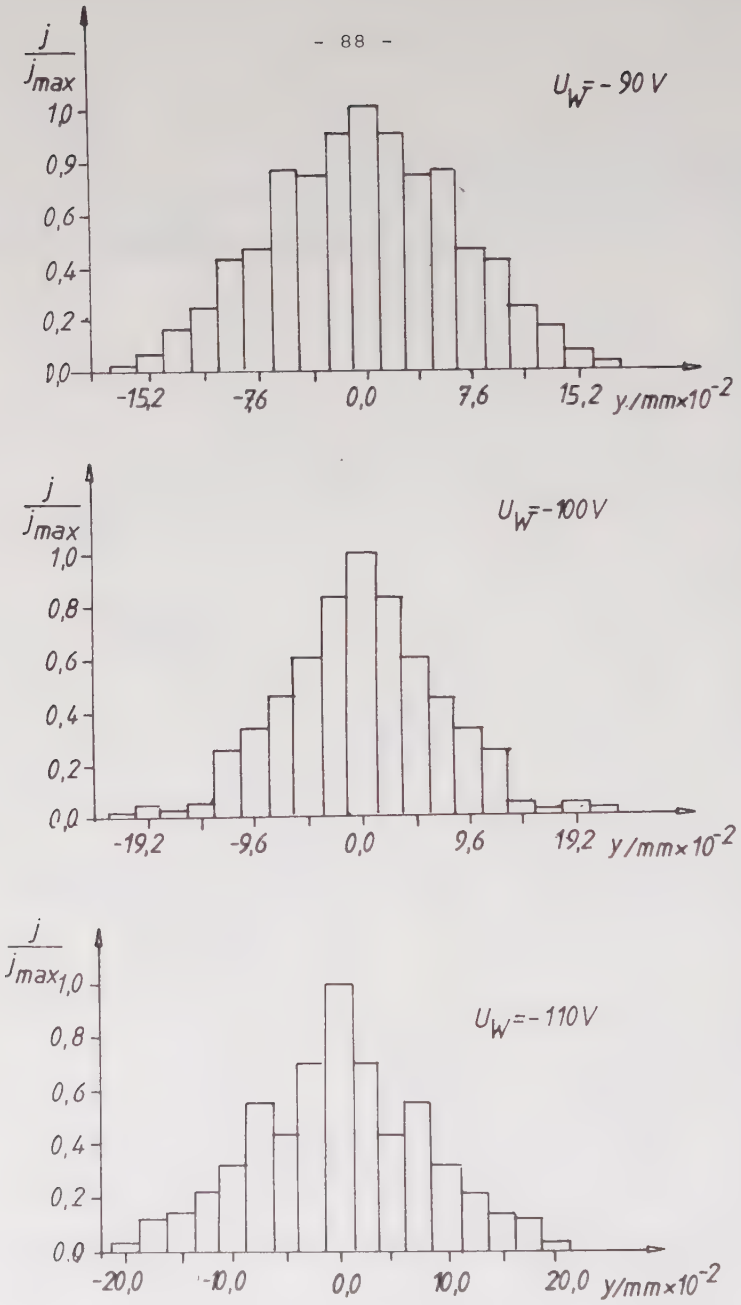



Abb. 42 b: In der Ebene z = 25 mm berechnete Stromdichteverteilungen für verschiedene Wehneltspannungen $U_W$ unter Berücksichtigung der Raumladung

## 6. Zusammenfassung

Ein Verfahren zur Lösung der Poisson-Gleichung bei vorgegebener Raumladungsdichte in rotationssymmetrischen Strahlerzeugersystemen mit feiner spitzenförmiger Kathode wird entwickelt. Es setzt voraus, daß die Raumladungsdichte nur in einer Kugelschale $r_o \leq r \leq r_n$ merklich von Null verschieden ist. Die Lösung wird additiv aus einer Lösung der Laplacegleichung und einer Partikulärlösung der Poisson-Gleichung zusammengesetzt. Die Lösung der rotationssymmetrischen Laplacegleichung erfolgt nach einer bekannten Variante der Integralgleichungsmethode. Die rotationssymmetrische Poisson-Gleichung wird in Kugelkoordinaten durch einen Separationsansatz auf eine Folge eindimensionaler Differentialgleichungen reduziert und als Randwertprobleme durch ein Verfahren von Numerov (1923) gelöst.

Zur Berechnung der Raumladungsdichte wird das Lösungsgebiet $r_o \leq r \leq r_n$ im wesentlichen in zwei Bereiche unterteilt. Der eine ist eine der Kathodenoberfläche benachbarte Schicht $r_o \leq r \leq r_k \ll r_n$, in welcher sowohl die elektrische Feldstärke als auch senkrecht zur Kathodenoberfläche ausgehende Elektronenbahnen praktisch radiale Richtung besitzen. Im anderen Bereich ($r_k < r \leq r_n$) wird eine laminare Elektronenströmung angenommen. Die kathodennahe Schicht wird weiter in ringförmige Intervalle $\vartheta^*_j \leq \vartheta < \vartheta^*_{j+1}$ unterteilt, die so schmal sind, daß in jedem von ihnen näherungsweise Kugelsymmetrie angenommen und die von Porter et al. (1972) angegebene Lösung für die Kugeldiode verwendet werden kann.

Die Definition der Grenze $r_k$ zwischen beiden Bereichen impliziert, daß ein gegebenenfalls vor der Kathode auftreten-

des Potentialminimum im Bereich $r<r_k$ liegt. Im Bereich $r_k<r<r_n$ gilt wegen der vorausgesetzten Laminarität der Elektronenströmung die Konstanz des Stroms in jeder Stromröhre. Die lokale Stromdichte folgt somit, indem man diesen Strom durch den jeweiligen Querschnitt der Röhre teilt. Um die endliche Breite der Energieverteilung der Elektronen auch in diesem Bereich wenigstens teilweise zu berücksichtigen, wird die an sich nur für die ebene Diode geltende Raumladungsformel von Langmuir (1923) modifiziert, indem sie mit einem die Veränderlichkeit des Röhrenquerschnitts beschreibenden "Divergenzfaktor" multipliziert wird. Die Begrenzung der Röhrenquerschnitte wird dabei durch numerische Berechnung einer Schar von Elektronenbahnen ermittelt.
Um die gegenseitige Abhängigkeit von Raumladungsdichte und Potentialverlauf zu berücksichtigen, werden abwechselnd iterativ Potential- und Raumladungsverteilung berechnet, bis die maximale Änderung der Raumladungsdichte bei einem Iterationszyklus eine vorgegebene Fehlerschranke unterschreitet.

Das Verfahren wurde zunächst am Beispiel der Kugeldiode getestet. Daraus folgt die Temperaturabhängigkeit der Lage und der Tiefe des Potentialminimums vor der Kathode.

Die Ergebnisse der Potential- und Raumladungsberechnung für ein Triodensystem (Strahlerzeuger I) an dem R. Lauer (1976) Messungen vorgenommen hat, werden durch Äquipotentiallinienbilder dargestellt. Die berechneten Emittanzdiagramme sind in guter Übereinstimmung mit von R. Lauer aus Messungen gewonnenen.
Weiter werden Ergebnisse der Potential- und Raumladungsberechnung für ein Triodensystem mit Kugelkathode (Strahler-

zeuger II) dargestellt. Hier untersuchen wir vor allem den Filtereffekt des raumladungsbedingten Potentialminimums vor der Kathode auf den emittierten Elektronenstrom an Hand von berechneten Emittanzdiagrammen. Die Ergebisse zeigen in guter qualitativer Übereinstimmung mit Messungen von Lauer, daß die Größe des emittierenden Kathodenbereiches durch den Raumladungseinfluß abnimmt. Mit und ohne Raumladungseinfluß berechnete Stromdichteverteilungen werden in Form von Histogrammen dargestellt.

Bei Herrn Prof. Dr. E. Kasper bedanke ich mich für die Anregung und stete Förderung dieser Arbeit, sowie für die Bereitstellung von Basisprogrammen. Ferner danke ich Herrn Prof. Dr. F. Lenz für die kritische Durchsicht des Manuskripts.
Mein Dank gilt ferner Herrn Dipl. Phys. M. Eupper und allen anderen Mitarbeitern des Lehrstuhls für Theoretische Elektronenphysik für zahlreiche wertvolle Diskussionsbeiträge.
Dem Zentrum für Datenverarbeitung der Universität Tübingen danke ich für Überlassung von Rechenzeit sowie der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Bereitstellung von Mitteln.

Literaturliste

Abramowitz H. und I.A. Stegun (1973), Handbook of Mathematical Functions, Dover Publ., New York

Amboss, K. (1969), Advances in Electronics and Electron Physics, 27,

Boersch, H. (1954) Z. Phys. 139, 115

Borries, B. v. (1948) Optik 3, 321

Eupper, M. (1980), Diplomarbeit, Tübingen

Eupper, M. (1982), Optik 62, 299

Fox, L. (1957) The Numerical Solution of Two Point Boundary Value Problems in Ordinary Differential Equations, Academic Press

Hanssen, K.J. (1964), Zs. für Naturforschung 19, 896

Hasker, J. (1966) Phillips Res. Rpts. 21, 122

Hasker, J. (1969 I) Phillips Res. Rpts. 24, 231

Hasker, J. (1969 II) Phillips Res. Rpts. 24, 263

Hauke, R. (1977) Dissertation, Tübingen

Hoch, H. Kasper, E., Kern, D. (1978) Optik 50, 413

Kasper, E. Lenz, F. (1980) Electron Microscopy, Vol. 1, 10

Kasper, E. (1980) Numerische Elektronenoptik, Vorlesungsmanuskript

Kasper, E. (1982 I) in Topics in Current Physics, Vol. 18, Magnetic Electron Lenses, Springer-Verlag

Kasper, E. (1982 II) in Advances in Optical and Electron Microskopy, Vol. 8, 207

Kasper, E. (1982 III) Einführung in die Numerische Datenverarbeitung, Vorlesungsmanuskript

Kellog, U.D. (1929) Foundations of Potential Theory, Springer-Verlag

Kirstein, P.T., Hornby, J.S. (1964), IEEE Trans. Electron Devices 11, 196

Lauer, R. (1976), Z. Naturforsch. 31a, 1160

Lauer, R. (1982) in Advancesin Optical and Electron Microscopy, Vol. 8, 137

Langmuir, I. (1923) Phys. Rev. 21, 419

Loeffler, K.H. (1969) Z. Angew. Physik, 27, 145

Munro, E. (1973), Image Processing and Computer-aided Design in Electron Optics, Academic Press, London, 284

Nottingham, W.B. (1956), in Handbuch der Physik XXI, Springer Verlag

Numerov, B. (1923), Publ. Obs. Astrophys. Central Russie 2, 188

Porter, J.H., Franzen, W., Wenstrup, R.S. (1972) J. Appl. Phys. 43, 344

Ralston, A., Wilf, H.S. (1970), Mathematische Methoden für Digitalrechner I, Oldenburg Verlag, München

Rauh, H. (1971), Z. f. Naturf., 26a, 1667

Renau, A. ,Read, F.H., Brunt, J.N.H. (1982) Sci. Instruments, 15, 3, 347

Rose, H., Spehr, R. (1980), Optik 57, 339

Stoer, J. (1973) Einführung in die Numerische Mathematik I, Springer-Verlag

Weber, C. (1967) Dissertation, Eindhoven

Zimmermann, B. (1970) Advances in Electronics and Electron Physics, 29, 257

Lebenslauf

| | |
|---|---|
| 26.11.1954 | geboren in Balingen<br>Eltern: Hans Weyßer, Rentner<br>Ernestine Weyßer geb. Ege |
| 1961 - 1966 | Besuch der Grund- und Hauptschule in Balingen |
| 1966 - 1975 | Besuch des Gymnasiums Balingen |
| 9. 6. 1975 | Reifeprüfung am Gymnasium Balingen |
| 1975 - 1981 | Studium der Physik an der Eberhard-Karls-Universität in Tübingen |
| 11. 3.1981 | Diplom-Hauptprüfung<br>Diplomarbeit: "Numerische Berechnung von elektronenoptischen Eigenschaften elektrostatischer Zwölfpolablenksysteme" unter Anleitung von Prof. Dr. E. Kasper am Lehrstuhl für Theoretische Elektronenphysik der Universität Tübingen |
| 1981 - 1983 | Arbeit an der Dissertation "Feldberechnung in rotationssymmetrischen Elektronenstrahlerzeugern mit Spitzenkathode unter Berücksichtigung von Raumladungen" unter Anleitung von Prof. Dr. E. Kasper am Lehrstuhl für Theoretische Elektronenphysik der Universität Tübingen. |
| 10. 4.1981 | Eheschließung mit Karin geb. Grasser |
| seit 1981 | Wissenschaftlicher Angestellter am Lehrstuhl für Theoretische Elektronenphysik der Universität Tübingen. Wahrnehmung eines von der Deutschen Forschungsgemeinschaft vergebenen Forschungsauftrages: Entwicklung und Erprobung von Methoden zur numerischen Berechnung der Eigenschaften von Elektronenstrahlerzeugern mit Raumladungseffekten. |
| 19.10.1982 | Geburt von Fabian |

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren und Dozenten:

Physik

M. Baumann, K.-H. Gaukler, F. Gönnenwein, R. Hübener, C. Jönsson, E. Kasper, P. Kramer, H. Krüger, F. Lenz, G. Mack, G. Möllenstedt, H. Pfister, R. Schief, J. Sommer, R. Speidel, H. Stumpf, F. Wahl, K. Wildermuth

Mathematik

H. Fischer, H. de Groote, E. Siebert, H. Sohr

Chemie

H.-D. Ebert, J. Strähle

Sprint-Druck GmbH
7000 Stuttgart 30
Wiener Str. 117
Tel. 0711/81 26 69

Sprint-Druck GmbH
7000 Stuttgart 30
Wiener Str. 117
Tel. 0711/81 26 69